

## МОДЕЛИРОВАНИЕ СПЕКТРА ОТРАЖЕНИЯ ВОЛОКОННЫХ БРЭГГОВСКИХ РЕШЕТОК КАК СТРУКТУРНОГО ЭЛЕМЕНТА КОМБИНИРОВАННЫХ ВОЛОКОННО-ОПТИЧЕСКИХ ДАТЧИКОВ

*Т.А. Аглиуллин, В.И. Анфиногентов, Б.И. Валеев, А.И. Садыкова, А.Ж. Сахабутдинов*

Казанский национальный исследовательский технический университет  
им. А.Н. Туполева – КАИ  
420111, Российская Федерация, г. Казань, К. Маркса, 10

**Аннотация.** В работе исследуются и сравниваются методы формирования спектрального отклика ВБР, основанные на методе определения коэффициентов отражения и прохождения плоских волн через слоистые структуры, результатом которой является решение системы линейных уравнений относительно коэффициентов прохождения и отражения в каждом слое методом прогонки. Исследованы методы, основанные на построении матриц передач для ВБР в целом, вывод формы записи которой различается или не полон во множестве источников. Для сравнительного анализа выбраны две зависимости коэффициента отражения от длины волны для однородной ВБР, как часто приводимые в различных публикациях. Из рассмотрения исключены те зависимости коэффициентов отражения ВБР, которые формируются на основе матрицы передачи, имеющей в своей структуре полиномы Чебышева второго рода. Варианты моделирования по рекуррентным соотношениям, включающие в себя необходимость вычисления полиномов Чебышева, намеренно были исключены из рассмотрения, поскольку они не выигрывают в производительности в сравнении с методом коэффициентов прохождения и отражения. Предложена и исследована модификация метода коэффициентов отражения и прохождения, которая предполагает моделирование ВБР слоистой структурой, представляющей ВБР как совокупность «светлых» и «темных» слоев и позволяет редуцировать количество слоев моделируемой слоистой структуры до количества полупериодов ВБР, и сводится к последовательному перемножению двумерных матриц.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, волоконные брэгговские структуры, матрица передачи, плоские волны в неоднородной среде.

### Введение

Математическое моделирование спектров отражения и/или пропускания пассивных и активных элементов волоконно-оптических цепей является одним из главных подходов, применяемых при проектировании как волоконных линий связи, так и волоконно-оптических сенсорных сетей. Математическое моделирование не только повышает нашу предсказательную силу в оценке результата того или иного воздействия на волоконно-оптическую сеть, но и позволяет оптимизировать отдельные элементы этих сетей. Одним из наиболее часто используемых элементов волоконно-оптических сенсорных сетей, а, равно как и сетей передачи данных, является периодическая или квазипериодическая структура, сформированная в сердцевине оптического волокна, путем изменения показателя преломления. В частности, к элементам такого типа относится широкий класс пассивных волоконно-оптических структур, как волоконные брэгговские решетки (ВБР). Кроме классических ВБР, за последние десять лет широкое распространение получили ВБР с одним или несколькими фазовыми сдвигами, аподизированные и чирпированные ВБР, сложно структурированные ВБР, а также, ВБР комбинированные с открытыми или закрытыми резонаторами Фабри-Перо (РФП).

Базовыми компонентами упомянутых выше сложных или комбинированных пассивных волоконно-оптических структур являются ВБР и РФП. Комбинирование этих

базовых элементов как между собой, так и друг с другом позволяют получить различные конструкции датчиков с отличающимися спектрами отражений и разными свойствами, и характеристиками (Рис. 1). Датчик, представляющий собой внутренний (или внешний) РФП (Рис. 1,а) может быть использован как высокоточный точечный датчик температуры [1]. Классическая одиночная ВБР (Рис. 1,б) также используется в качестве датчиков температуры, деформации, вибрации и пр. [2]. Две ВБР, записанные последовательно (Рис. 1,в) или поверх друг друга (Рис. 1,г) нашли применение в качестве адресных волоконных брэгговских структур [3]. Датчики на основе ВБР с включенным в его структуру дискретным фазовым сдвигом (Рис. 1,д) используются в качестве высокоточных датчиков брэгговского типа из-за наличия в спектре отражения сверхузкого окна непрозрачности контроль положения которого может быть осуществлен с более высокой точностью, нежели сдвиг всей спектральной формы [4]. Два и более фазовых сдвигов в структуре ВБР позволяют их также использовать как адресные [5,6] или даже многоадресные [7,8] структуры. Комбинированные ВБР и РФП датчики нашли свое применение в качестве чувствительных элементов для системы контроля концентрации газов [9].

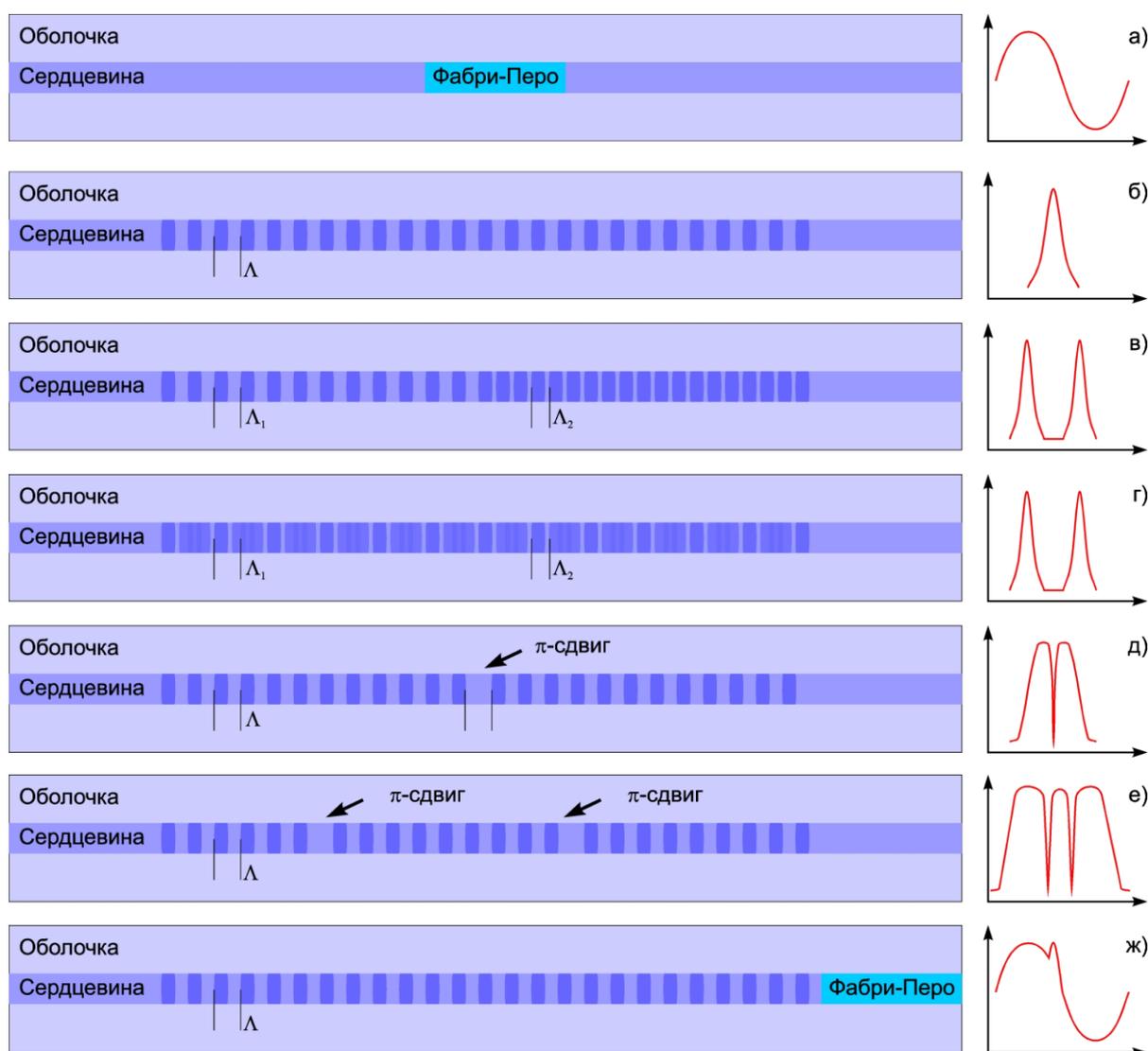


Рис. 1. Некоторые виды слоистых структур, формируемых в сердцевине оптических волокон

Для повышения качества проектируемых элементов оптических сетей передачи данных или сенсорных сетей, необходимо обладать надежными методами и средствами

моделирования спектра отражения или пропускания высокой предсказательной силы для комбинированных структур в различной конфигурации.

Базовым элементом, представляющим отдельный интерес, является математический аппарат, позволяющий восстанавливать спектр отражения ВБР.

В работе исследуются и сравниваются методы формирования спектрального отклика ВБР, основанные на методе определения коэффициентов отражения и прохождения плоских волн через слоистые структуры [10], результатом которой является решение системы линейных уравнений относительно коэффициентов прохождения и отражения в каждом слое методом прогонки («А»). Исследованы методы, основанные на построении матриц передач для всей ВБР в целом, вывод формы записи которой различается или не полон [11–18]. Для сравнительного анализа были выбраны зависимости коэффициента отражения от длины волны для однородной не аподизированной ВБР, приведенные в работе Abdallah Ikhlef [12] («В»), и в книге Raman Kashyap [13] или у Govind Agrawal & A.H. Vobeck [19] («С»). В большом количестве работ, матрица передачи ВБР сводится к матрице, имеющей в своей структуре полиномы Чебышева второго рода [14], что предполагает их вычисление для каждой длины волны. Варианты моделирования по рекуррентным соотношениям, включающие в себя необходимость вычисления полиномов Чебышева, намеренно были исключены из рассмотрения, поскольку они не выигрывают в производительности в сравнении с методом коэффициентов прохождения и отражения. Предложена и исследована модификация метода коэффициентов отражения и прохождения, которая предполагает моделирование ВБР слоистой структурой, представляющей ВБР как совокупность «светлых» и «темных» слоев и позволяет редуцировать количество слоев моделируемой слоистой структуры до количества полупериодов ВБР, и сводится к последовательному перемножению двумерных матриц («D»). Полученные модели спектрального отклика были сравнены с результатами моделирования в программном пакете «OptiGrating», которая также использует методику матриц передач, однако разбивает всю структуру на участки с однородными элементами («E») Для удобства упоминания мы обозначили их метод «А», «В», «С», «D» и «E».

### Математическая основа

Интерференционная схема записи ВБР, как одна из наиболее часто используемых схем записи волоконных брэгговских решеток, реализует изменение показателя преломления вдоль длины решетки по гармоническому закону:

$$n(z) = n_0 + \frac{\Delta n}{2} + \frac{\Delta n}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\Lambda} z\right), \quad (1)$$

где  $\Lambda$  — период ВБР,  $n_0$  — показатель преломления сердцевины оптического волокна,  $\Delta n$  — амплитуда наведенного показателя преломления, которая в общем случае, может быть функцией длины решетки, например, с функцией гауссовой аподизации:

$$\Delta n(z) = \Delta n \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-z_M}{\sigma}\right)^2}, \quad (2)$$

где  $z_M$  — середина ВБР, а  $\sigma$  — параметр аподизации, отвечающий за отношение  $p$  величины наведенного показателя преломления на краях ВБР к ее величине на середине:

$$\sigma^2 = -\frac{1}{8} \frac{H^2}{\ln p}, \quad (3)$$

где  $H$  — длина ВБР. ВБР формируется в оптическом волокне, следовательно, показатель преломления сердцевины оптического волокна будет минимальным значением показателя

преломления в интервале ВБР, а максимальным будет сумма показателей преломления волокна и наведенного показателя преломления.

Таким образом исходными параметрами для формирования ВБР принимаются: длина решетки, показатель преломления сердцевины оптического волокна, наведенный показатель преломления, период ВБР и параметр аподизации.

*Метод «А»*

Любую оптически прозрачную среду с переменным, но известным законом изменения показателя преломления можно представить в виде совокупности тонких однородных пленок, внутри каждой из которых показатель преломления можно считать постоянным [10]. Для чего вся ВБР разбивается одномерной координатной сеткой  $\{z_i\}$ ,  $i = 1, N$  (рис. 2) на однородные слои в каждом из которых показатель преломления определяются как интегральное среднее по толщине слоя:

$$n_{i+1} = \frac{1}{z_{i+1} - z_i} \int_{z_i}^{z_{i+1}} n(z) dz . \tag{4}$$

Подставив (1) и (2) в (4) получим функцию, описывающую послойную зависимость показателя преломления:

$$n_{i+1} = \frac{1}{z_{i+1} - z_i} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \left[ n_0 + \frac{1}{2} \cdot \Delta n \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{z-z_M}{\sigma} \right)^2} \cdot \left( 1 + \sin \left( \frac{2\pi}{\Lambda} z \right) \right) \right] dz . \tag{5}$$

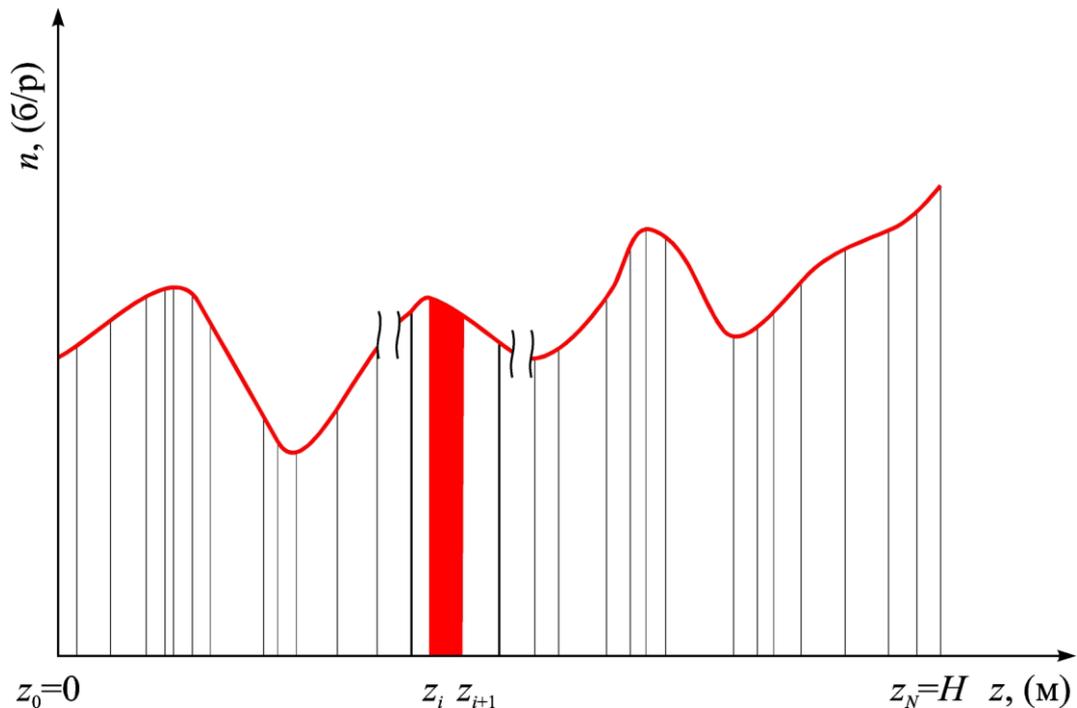


Рис. 2. Схема слоистой структуры для вещества с произвольной зависимостью показателя преломления по толщине

Интеграл (5) в элементарных функциях не существует, однако интегрирование (5) в нашем случае и не требуется, поскольку показатель преломления среды внутри каждого слоя должен быть постоянен, а выражение (5) не учитывает этого требования, поскольку нормирующий амплитуду изменения показателя преломления множитель с экспонентой предполагает изменения амплитуды внутри слоя по его толщине. Учет постоянства

наведенного показателя преломления внутри каждого слоя предполагает постоянство множителя с экспонентой в (5) по толщине слоя. Следовательно, множитель с экспонентой в (5) должен быть заменен на его среднее значение, которое на интервале от  $[z_i, z_{i+1}]$  может быть заменено его значением в середине интервала:

$$e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-(z_M)_k}{\sigma_k}\right)^2} \approx e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z_{i+1}+z_i-(z_M)_k}{2\sigma_k}\right)^2} + o(\Delta z_i), \quad (6)$$

где  $\Delta z_i = z_{i+1} - z_i$ , а  $o(x)$  функция, определяющая погрешность, она обозначает, что указанная функция убывает быстрее, чем ее аргумент. Подставив (6) в (5), получим:

$$n_{i+1} = \frac{1}{z_{i+1} - z_i} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \left[ n_0 + \frac{1}{2} \Delta n \left( e^{\frac{1}{2}\left(\frac{z_{i+1}+z_i-2z_M}{2\sigma}\right)^2} + o(\Delta z_i) \right) \left( 1 + \sin\left(\frac{2\pi}{\Lambda} z\right) \right) \right] dz. \quad (7)$$

После чего множитель, стоящий при амплитуде, становится независимым от переменной интегрирования и интеграл может быть взят аналитически и позволяет записать зависимость показателя преломления по слоям произвольной слоистой структуры:

$$n_{i+1} = n_0 + \frac{\Delta n}{2} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{z_{i+1}+z_i-2z_M}{2\sigma}\right)^2} \times \left( 1 - \frac{\Lambda}{\pi(z_{i+1} - z_i)} \sin\left(\frac{\pi(z_{i+1} + z_i)}{\Lambda}\right) \sin\left(\frac{\pi(z_{i+1} - z_i)}{\Lambda}\right) \right) + o(\Delta z_i). \quad (8)$$

Моделирование спектра отражения такой структуры заключается в инициализации параметров слоев, исходя из соотношений (8), с дальнейшим применением классического алгоритма расчета слоистой структуры методом обратной и прямой прогонок. Электрическая и магнитная составляющие электромагнитного поля в каждой точке каждого слоя являются суперпозицией двух волн (рис. . 3), движущихся в разных направлениях, — прямой и отраженной:

$$\begin{aligned} E_i(z) &= t_i \cdot e^{-j(k_i z + \omega \tau)} + r_i \cdot e^{j(k_i z - \omega \tau)}, \\ H_i(z) &= \frac{t_i}{w_i} \cdot e^{-j(k_i z + \omega \tau)} - \frac{r_i}{w_i} \cdot e^{j(k_i z - \omega \tau)}, \quad i = \overline{0, N+1}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\tau$  — время,  $t_i$  и  $r_i$  — коэффициенты прохождения и отражения излучения при его прохождении через  $i$ -ый слой;  $k_i$  — волновое число, и  $w_i$  — волновое сопротивление для  $i$ -го слоя. Первые слагаемые в (9) как для электрической, так и для магнитной составляющей описывают волну, движущуюся вдоль направления распространения, а вторые слагаемые описывают отраженные от границ разделов сред волны, движущиеся против направления распространения.

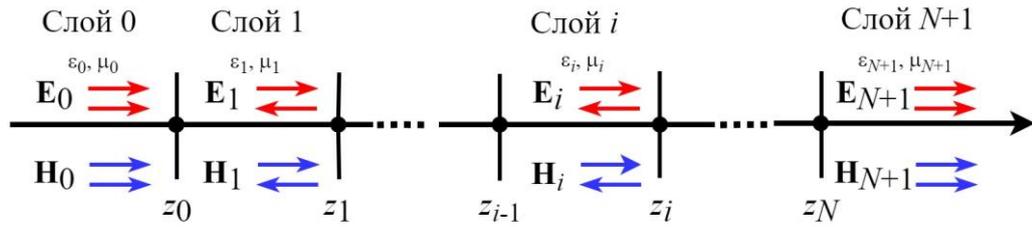


Рис. 3. Одномерная модель слоистой структуры

Волновое число и волновое сопротивление зависят от длины волны излучения, диэлектрической и магнитной проницаемости среды:

$$k_i = 2\pi f \sqrt{\varepsilon_* \mu_*} = \frac{2\pi c \sqrt{\varepsilon_* \mu_*}}{\lambda} \sqrt{\varepsilon_i \mu_i} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\varepsilon_i \mu_i}, \quad w_i = \sqrt{\mu_i \mu_* / \varepsilon_i \varepsilon_*}, \quad (10)$$

где  $\lambda = c/f$  — длина волны,  $\varepsilon_i$  — диэлектрическая и  $\mu_i$  — магнитная проницаемость слоя,  $\varepsilon_*$  — абсолютная диэлектрическая и  $\mu_*$  — абсолютная магнитная проницаемости вакуума,  $c$  — скорость света в вакууме.

Условие неразрывности электромагнитных волн в пространстве заключается в равенстве электрических и магнитных полей в каждой точке пространства, включая границы разделов между слоями:

$$\begin{cases} t_i \cdot e^{-jk_i z_i} + r_i \cdot e^{jk_i z_i} = t_{i+1} \cdot e^{-jk_{i+1} z_i} + r_{i+1} \cdot e^{jk_{i+1} z_i} \\ \frac{t_i \cdot e^{-jk_i z_i} - r_i \cdot e^{jk_i z_i}}{w_i} = \frac{t_{i+1} \cdot e^{-jk_{i+1} z_i} - r_{i+1} \cdot e^{jk_{i+1} z_i}}{w_{i+1}}, \quad i = \overline{0, N}. \end{cases} \quad (11)$$

Заметим, что общий множитель  $e^{-j\omega t}$ , описывающий изменение электрической и магнитной волн во времени, в левых и правых частях равенств (11) сокращается. В итоге соотношения (11) дают систему из  $2(N+1)$  линейных уравнений для определения  $2(N+2)$  неизвестных коэффициентов прохождения  $t_i$  и отражения  $r_i$  в каждом из  $(N+2)$  слоев.

Дополнительный анализ систем уравнений (11) позволяет исключить из них абсолютные  $\varepsilon_*$  диэлектрическую и  $\mu_*$  магнитную проницаемости вакуума, пользуясь соотношением:

$$c \cdot \sqrt{\varepsilon_* \mu_*} \equiv 1, \quad (12)$$

где  $c$  — скорость света. В уравнениях (11) левые и правые части сокращаются на квадратный корень из произведения абсолютной диэлектрической и магнитной проницаемости, а волновое число переписывается через длину волны.

Диэлектрическая  $\varepsilon$  и магнитная проницаемость  $\mu$  связаны с показателем преломления соотношением:

$$n = \sqrt{\varepsilon \mu}. \quad (13)$$

Для того, чтобы замкнуть полученную систему уравнений, необходимо дополнить систему уравнений (11) еще двумя соотношениями. Выше мы постулировали, что все излучение, пришедшее со стороны источника излучения в нулевой слой («Слой 0»), проходит сквозь него без потерь; а отражение от правой границы последнего слоя («Слой  $N+1$ ») отсутствует в силу ее бесконечной удаленности. Эти условия позволяют дополнить

систему уравнений двумя недостающими соотношениями, для коэффициентов прохождения нулевого и отражения последнего слоев, соответственно:

$$t_0 = 1, r_{N+1} = 0. \quad (14)$$

Объединяя (11) и (14) получаем замкнутую систему из  $2(N + 1)$  линейных уравнений относительно  $2(N + 1)$  неизвестных коэффициентов прохождения и отражения каждого из слоев, которую можно записать в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -w_1 & -w_0 & w_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & f_1 & g_1 & h_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_i & b_i & c_i & d_i & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_i & f_i & g_i & h_i & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_N & b_N & c_N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_N & f_N & g_N \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_0 \\ t_1 \\ r_1 \\ t_2 \\ r_2 \\ \dots \\ t_i \\ r_i \\ \dots \\ t_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -w_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

где в целях компактификации записи введены обозначения:

$$\begin{aligned} a_i &= e^{-jk_i z_i} & b_i &= e^{jk_i z_i} & c_i &= -e^{-jk_{i+1} z_i} & d_i &= -e^{jk_{i+1} z_i} \\ e_i &= w_{i+1} e^{-jk_i z_i} & f_i &= -w_{i+1} e^{jk_i z_i} & g_i &= -w_i e^{-jk_{i+1} z_i} & h_i &= w_i e^{jk_{i+1} z_i} \end{aligned} \quad (16)$$

Система линейных уравнений, записанная в матричной форме, может быть решена методом Гаусса, путем приведения матрицы коэффициентов к треугольному виду. Учитывая специфическую форму элементов матрицы, в каждой внутренней строке содержится лишь четыре элемента, более того, строки, содержащие элементы на одних и тех же позициях, группируются по две. Таким образом, матрица коэффициентов представляет собой пяти диагональную матрицу, содержащую помимо основной диагонали две над-диагонали и две под-диагонали, причем, две дальше отстоящие от центральной диагонали над- и под-диагонали разрежены. Для систем линейных уравнений с матрицей коэффициентов трех-, четырех- и пяти диагонального вида применим метод прогонки, который заключается в последовательном преобразовании строк матрицы, которое приводит ее к треугольному виду. Приведение матрицы коэффициентов к диагональному виду, сразу же позволяет определить значение неизвестной, стоящей в вершине треугольника. Матрицу коэффициентов в (15) с одинаковой легкостью можно привести как к верхнему треугольному виду, так и к нижнему треугольному виду. В случае приведения матрицы к верхнему треугольному виду, автоматически вычисляется значение коэффициента пропуска последнего слоя. В случае же нижнего треугольного вида, появляется возможность вычисления коэффициента отражения для нулевого слоя.

Приведение матрицы коэффициентов в (15) к нижнему треугольному виду можно выполнить, воспользовавшись формулами обратной прогонки по рекуррентному соотношению, задав начальное значение для  $\gamma$  в виде:

$$\gamma_N = 1 + \frac{w_N - w_{N-1}}{w_N + w_{N+1}} e^{-j2k_N(z_N - z_{N-1})}, \quad (17)$$

после чего в обратном цикле определить остальные значения  $\gamma_i$  по рекуррентному соотношению:

$$\gamma_i = 1 + \frac{(w_i - w_{i+1})\gamma_{i+1} + 2w_{i+1}}{(w_i + w_{i+1})\gamma_{i+1} - 2w_{i+1}} e^{-j2k_i(z_i - z_{i-1})}, \quad i = \overline{N-1, -1, 1}. \quad (18)$$

Что в итоге позволяет вычислить коэффициент пропускания и отражения для нулевого слоя:

$$\begin{cases} t_0^A = 1 \\ r_0^A = \frac{(w_1 + w_0)\gamma_1 - 2w_1}{(w_1 - w_0)\gamma_1 - 2w_1} \end{cases} \quad (19)$$

### Метод «В»

Коэффициент отражения однородной не аподизированной ВБР, приведенный в работе Abdallah Ikhlef [12], в зависимости от длины волны моделируется путем формирования результирующей матрицы передачи в виде:

$$\mathbf{B}(\lambda) = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma \cdot H) - j \frac{\Delta\beta}{\gamma} \sinh(\gamma \cdot H) & -j \frac{\kappa}{\gamma} \sinh(\gamma \cdot H) \\ j \frac{\kappa}{\gamma} \sinh(\gamma \cdot H) & \cosh(\gamma \cdot H) + j \frac{\Delta\beta}{\gamma} \sinh(\gamma \cdot H) \end{bmatrix}, \quad (20)$$

где  $H$  — длина ВБР, а параметры  $\gamma$ ,  $\kappa$  и  $\Delta\beta$  определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \Delta n_{\text{eff}} &= \frac{\Delta n}{2}, \quad n_{\text{eff}} = n_0 + \Delta n_{\text{eff}}, \quad \kappa = \pi \frac{\Delta n_{\text{eff}}}{\lambda}, \\ \Delta\beta &= \frac{2\pi n_{\text{eff}}}{\lambda} - \frac{\pi}{\Lambda}, \quad \gamma = \sqrt{|\kappa|^2 - \Delta\beta^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Зависимость  $\mathbf{B}(\lambda)$  от длины волны  $\lambda$  в (20) неявная, выражена через  $\kappa$ ,  $\Delta\beta$  и  $\gamma$ , которые являются функциями длины волны.

Коэффициент отражения на каждой длине волны определяется как квадрат модуля отношения  $|B_{1,0}/B_{0,0}|^2$ :

$$r_0^B(\lambda) = \left| \frac{B_{1,0}}{B_{0,0}} \right|^2. \quad (22)$$

### Метод «С»

Коэффициент отражения однородной не аподизированной ВБР, приведенный в работах Raman Kashyap [13] и у Govind Agrawal & А.Н. Vobeck [19] в зависимости от длины волны моделируется путем формирования матрицы передачи в виде:

$$\mathbf{C}(\lambda) = \frac{1}{1-r^2} \begin{bmatrix} e^{jqH} - r^2 e^{-jqH} & -r(e^{jqH} - e^{-jqH}) \\ r(e^{jqH} - e^{-jqH}) & e^{-jqH} - r^2 e^{jqH} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

где  $H$  — длина ВБР, а параметры  $q$  и  $r$  определяются по формулам:

$$\lambda_{Br} = 2 \left( n_0 + \frac{\Delta n}{2} \right) \Lambda, \quad \kappa = \frac{\pi}{\lambda_{Br}} \frac{\Delta n}{n_0}, \quad \beta = 2\pi \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_{Br}} \right),$$

$$q = \sqrt{\beta^2 - \kappa^2}, \quad r = \frac{q - \beta}{\kappa}.$$
(24)

Зависимость  $\mathbf{M}(\lambda)$  и в (23) от длины волны  $\lambda$  неявная, выражена через  $\beta$ ,  $q$  и  $r$ , которые являются функциями длины волны.

Коэффициент отражения на каждой длине волны определяется также, как квадрат модуля отношения  $|C_{1,0}/C_{0,0}|^2$ :

$$r_0^c(\lambda) = \left| \frac{C_{1,0}}{C_{0,0}} \right|^2.$$
(25)

#### Метод «D»

Моделирование произвольной структуры в виде большой совокупности тонких пленок внутри каждой из которых показатель преломления постоянен, позволяет заменить метод прогонки, описанный в «А», на произведение матриц размерности  $2 \times 2$ . При условии, если каждая половина периода ВБР моделируется одним слоем с постоянной величиной показателя преломления, так как это показано на рисунке 4. В методе «А» ВБР моделируется в виде большой совокупности тонких однородных слоев, и на каждые половину периода приходится от 20 таких слоев, так как это показано она части схемы рисунка 4, выделенной синим. В методе «D» в отличие от «А» в качестве элементарных слоев выступают «темные» и «светлые» слои модуляции коэффициента преломления, рисунок 4, подсвечено красным.

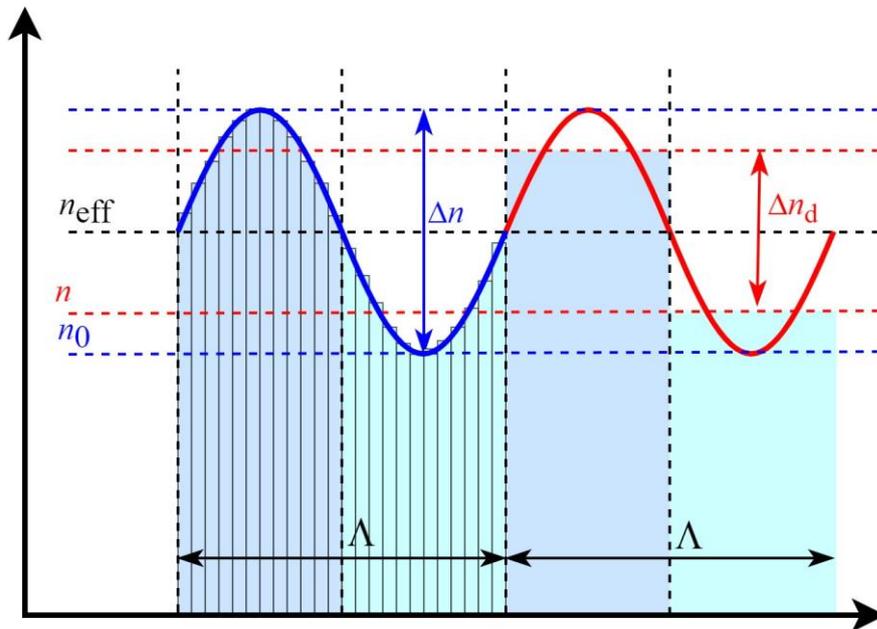


Рис. 4. Переход от модели тонких пленок к моделированию слоями толщиной в половину периода ВБР

Рассмотрим связь коэффициентов прохождения и отражения в пределах одного периода ВБР (рис. 5). Параметры каждого слоя определяются волновым числом  $k$  и волновым сопротивлением  $w$  каждого слоя, которые для периодической структуры можно

определить как две пары параметров  $\{k_0, w_0\}$  и  $\{k_1, w_1\}$ . Величина  $\theta$  изменяется в интервале от 0 до 1 и определяет отношение толщин «темного» и «светлого» слоев.

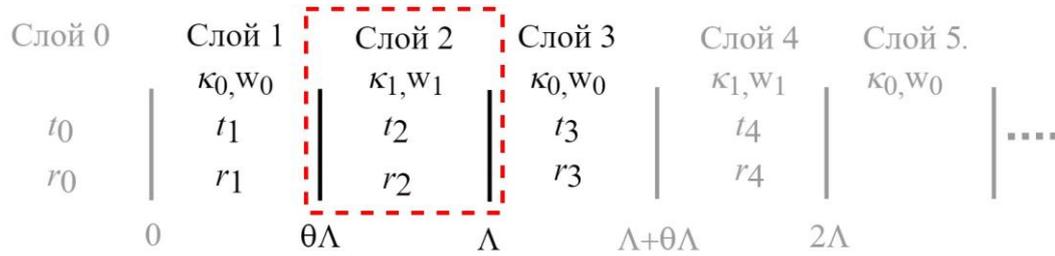


Рис. 5. Метод «D», связь коэффициентов прохождения и отражения в пределах одного периода БР

Рассмотрим матрицу, связывающую коэффициенты прохождения и отражения первого слоя  $t_1$  и  $r_1$  с прохождения и отражения третьего слоя  $t_3$  и  $r_3$ , записанной в виде:

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} t_3 \\ r_3 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Для того, чтобы найти элементы матрицы  $\mathbf{M}$ , запишем условия непрерывности поля на границе  $z = \theta \cdot \Lambda$ :

$$\begin{aligned} z = \theta \cdot \Lambda \\ t_1 \times e^{-jk_0\theta\Lambda} + r_1 \times e^{jk_0\theta\Lambda} &= t_2 \times e^{-jk_1\theta\Lambda} + r_2 \times e^{jk_1\theta\Lambda} \\ \frac{t_1 \times e^{-jk_0\theta\Lambda} - r_1 \times e^{jk_0\theta\Lambda}}{w_0} &= \frac{t_2 \times e^{-jk_1\theta\Lambda} - r_2 \times e^{jk_1\theta\Lambda}}{w_1} \end{aligned} \quad (27)$$

и на границе  $z = \Lambda$ :

$$\begin{aligned} z = \Lambda \\ t_2 \times e^{-jk_1\Lambda} + r_2 \times e^{jk_1\Lambda} &= t_3 \times e^{-jk_0\Lambda} + r_3 \times e^{jk_0\Lambda} \\ \frac{t_2 \times e^{-jk_1\Lambda} - r_2 \times e^{jk_1\Lambda}}{w_1} &= \frac{t_3 \times e^{-jk_0\Lambda} - r_3 \times e^{jk_0\Lambda}}{w_0} \end{aligned} \quad (28)$$

Рассматривая (27) и (28) как систему уравнений, можно исключить из них  $t_2$  и  $r_2$ , что дает в итоге матрицу перехода от коэффициентов прохождения и отражения первого слоя, к коэффициентам отражения и прохождения третьего слоя.

В свою очередь коэффициенты прохождения и отражения третьего слоя связываются с коэффициентами отражения и прохождения пятого слоя, пятого с седьмым, и так далее. Общий вид матрицы связи коэффициентов прохождения и отражения имеет вид:

$$\mathbf{D}(N) = \begin{bmatrix} D_{0,0} & D_{0,1} \\ D_{1,0} & D_{1,1} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Где элементы матрицы вычисляются по формулам:

$$D_{0,0} = \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n + \Delta n_d} \right)^2 e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n_d (\theta-1)\Lambda} - \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n + \Delta n_d} \right)^2 e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (2n + \Delta n_d)(\theta-1)\Lambda}, \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
 D_{0,1} &= -2je^{j\frac{2\pi}{\lambda}2n(N-1)\Lambda} e^{j\frac{2\pi}{\lambda}n(\theta+1)\Lambda} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+\Delta n_d)^2} \right) \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} (n+\Delta n_d)(\theta-1)\Lambda \right), \\
 D_{1,0} &= 2je^{-j\frac{2\pi}{\lambda}2n(N-1)\Lambda} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}n(\theta+1)\Lambda} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+\Delta n_d)^2} \right) \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} (n+\Delta n_d)(\theta-1)\Lambda \right), \\
 D_{1,1} &= \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\Delta n_d} \right)^2 e^{j\frac{2\pi}{\lambda}\Delta n_d(\theta-1)\Lambda} - \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+\Delta n_d} \right)^2 e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(2n+\Delta n_d)(\theta-1)\Lambda}.
 \end{aligned}$$

Можно заметить, что  $D_{0,0}$  и  $D_{1,1}$ , а также  $D_{0,1}$  и  $D_{1,0}$  являются комплексно-сопряженными друг к другу. Если в методе «А»  $n_0$  — минимальное, а  $(n_0 + \Delta n)$  — максимальное значение показателя преломления, то в методе «D»,  $n$  — это показатель преломления «светлого» слоя,  $(n + \Delta n_d)$  — показатель преломления «темного» слоя, при этом эффективный (средний во всей ВБР) показатель преломления совпадает для обоих методов.

Для реализации метода «D» должны быть определены параметры  $n$  и  $\Delta n_d$ , которые связаны с исходными параметрами моделирования задачи  $n_0$  и  $\Delta n$  соотношениями вида:

$$n = n_0 + \frac{\Delta n}{2} - \alpha \frac{\Delta n}{2}, \quad \Delta n_d = 2 \cdot \alpha \frac{\Delta n}{2}. \quad (31)$$

Параметр  $\alpha$  определяет правило усреднения показателя преломления на интервале каждой половины периода ВБР.

Параметр  $N$  определяет порядковый номер матрицы, а результирующая матрица передачи ВБР может быть получена как последовательное произведение матриц:

$$\mathbf{D} = \left( \frac{n(n + \Delta n_d)}{4} \right)^N \prod_{k=1}^N \mathbf{A}(k). \quad (32)$$

Коэффициент отражения на каждой длине волны определяется также, как квадрат модуля отношения  $|D_{1,0}/D_{0,0}|^2$ :

$$r_0^D(\lambda) = \left| \frac{D_{1,0}}{D_{0,0}} \right|^2. \quad (33)$$

### Параметры моделирования

Для сравнения результатов моделирования была выбрана однородная не аподизированная ВБР длиной  $6 \times 10^{-3}$  м с брэгговской длиной волны 1550 нм, показателем преломления  $n_0 = 1.4682$  и наведенным показателем преломления  $\Delta n = 0.0002$ . Эффективным показателем преломления ВБР будет среднее значение показателя преломления по участку волокна, содержащему решетку:

$$n_{\text{eff}} = n_0 + \frac{\Delta n}{2}, \quad (34)$$

что дает среднее значение эффективного показателя преломления ВБР равным  $n_{\text{eff}} \approx 1.4683$ . Период ВБР, определяется соотношением Брэгга-Вульфа:

$$\Lambda = \frac{\lambda_{Br}}{2 \cdot n_{eff}} = \frac{\lambda_{Br}}{2 \cdot (n_0 + \Delta n / 2)}, \quad (35)$$

и составляет  $\Lambda = 5.278213 \times 10^{-7}$  м.

### Сравнение результатов моделирования

Важное замечание следует сделать относительно выбора шага разбиения при построении спектра методом «А», для чего выбирается уменьшающаяся последовательность шагов  $\{\Delta z_n\}$ , таким образом, чтобы:

$$\Delta z_n = \frac{1}{2^n} \Delta z_0. \quad (36)$$

Потребуем, чтобы два спектра, полученных при разных разбиениях  $\Delta z_n$  и  $\Delta z_{n+1}$ , отличались бы друг от друга на величину, не превышающую произвольную заранее заданную малую величину  $\varepsilon$ . Обозначим спектр, полученный при шаге дискретизации  $\Delta z_n$ , в виде функции, зависящей от длины волны и шага дискретизации  $\Phi(\lambda, \Delta z_n)$ . Тогда, существует такое  $N$  из множества целых чисел, при котором для всех  $n$  превышающих  $N$ , и для любого разбиения  $\{\lambda_i\}$ , произвольного интервала  $[\lambda_{Br} - \Delta\lambda, \lambda_{Br} + \Delta\lambda]$ , где  $i$  принимает значения от 1 до  $M$ , норма относительных разностей двух спектров, полученных для разбиений  $z_n$  и  $z_{n+1}$ , отличаются на величину не превышающую этого заданного значения  $\varepsilon$ .

$$\exists N, M \in \mathbb{Z}; \forall \varepsilon, \lambda_{Br}, \Delta\lambda \in \mathbb{R}:$$

$$\begin{aligned} \Delta z_n = 2^{-n} \Delta z, \forall n \geq N; \lambda_i = \lambda_{Br} - \Delta\lambda + i \frac{2\Delta\lambda}{M}, i = \overline{0, M} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{i=0}^M \left\| \frac{\Phi(\lambda_i, \Delta z_{n+1}) - \Phi(\lambda_i, \Delta z_n)}{\Phi(\lambda_i, \Delta z_n)} \right\| \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (37)$$

Иными словами, шаг разбиения последовательно уменьшается вдвое каждый раз до тех пор, пока разница спектров, полученных для двух последовательных дискретизаций, не будет меньше заранее заданной произвольной малой величины. Опыт моделирования таких структур показывает, что шаг дискретизации должен быть на порядок-полтора меньше, чем период ВБР.

Шаг разбиения в методе «А» исходя из вышеуказанных рассуждений был выбран равным  $\Delta z = \Lambda \times 0.04$ , что обеспечивает сходимость последовательности разбиений для относительной погрешности восстановления спектральной характеристики  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

Вторым важным моментом является выбор параметра  $\alpha$  усреднения показателя преломления в методе «D» для половины периода ВБР. Одним из очевидных подходов к определению параметра  $\alpha$  является его определение, через среднее интегральное значение, учитывая (1), определим величину  $\alpha$ , потребовав, чтобы интеграл от  $n$  на каждом полупериоде по площади равнялся  $\alpha \times \Lambda / 2$ :

$$\int_0^{\Lambda/2} n(z) dz = \left( \left( n_0 + \frac{\Delta n}{2} \right) + \alpha \frac{\Delta n}{2} \right) \frac{\Lambda}{2} \text{ или } \int_{\Lambda/2}^{\Lambda} n(z) dz = \left( \left( n_0 + \frac{\Delta n}{2} \right) - \alpha \frac{\Delta n}{2} \right) \frac{\Lambda}{2}. \quad (38)$$

Подставляя  $n(z)$  из (1) в (38), получаем два тождественных линейных алгебраических уравнений относительно  $\alpha$ , решение каждого из которых дает  $\alpha = 2/\pi$ .

На рис. 6 приведен результат моделирования спектрального отклика однородной ВБР, с параметрами  $H = 6$  мм,  $n_0 = 1.4682$ ,  $\Delta n = 0.0002$ , построенная в программном пакете

OptiGrating; методами: «А» при  $\Delta z = 0.04 \times \Lambda$ ; «В»; «С»; и «D» при  $\alpha = 2/\pi$ . На вклейке рисунка показан фрагмент участка спектра, соответствующий области максимума спектра.

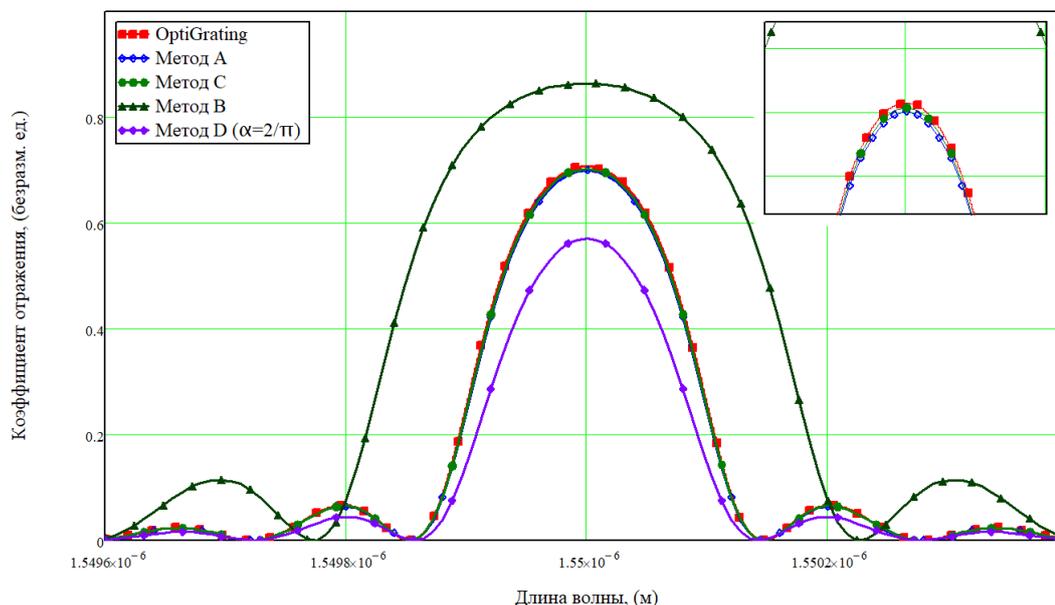


Рис. 6. Модель спектра отражения однородной ВБР, с параметрами  $H = 6$  мм,  $n_0 = 1.4682$ ,  $\Delta n = 0.0002$ , построенная в программном пакете OptiGrating, методами: «А» при  $\Delta z = 0.04 \times \Lambda$ ; «В»; «С»; и «D» при  $\alpha = 2/\pi$

Можно сделать вывод о том, что методы «А» и «С», мало того, что повторяют друг друга, обеспечивая хорошую корреляцию, кроме того, они обеспечивают хорошее совпадение результатов моделирования с сертифицированным специализированным программным обеспечением OptiGrating 4.0. Авторам, к сожалению, не удалось определить причину почему метод «В», изложенный в [12], не позволяет добиться совпадения результатов моделирования.

Некоторое удивление вызвал результат, полученный методом «D». Несмотря на кажущуюся корректность определения среднего значения показателя преломления по толщине каждого полупериода ВБР, полученные данные моделирования существенно отличались от данных, полученных методами «А», «С» и в OptiGrating. Единственным параметром, который отличает спектры, полученные в методах «А» и «С» от метода «D» является метод усреднения показателя преломления. Усреднение показателя преломления вдоль оптического волокна на интервале половины период ВБР должно, как казалось, удовлетворять требованиям интегрального среднего. Тем более, что усреднение методом интегрального среднего определяет и фазовую задержку, необходимую для света для прохождения этого расстояния. И, несмотря на это, данные моделирования не сходятся.

Для определения параметра усреднения показателя преломления по длине волокна  $\alpha$  была поставлена и решена обратная задача, в которой требованием являлось совпадение спектра отражения, полученного методом «D», с спектрами отражения, полученными методами «А» и «С». Решение обратной задачи показало, что при коэффициенте усреднения равном  $\alpha = \pi/4$ , различия в спектрах, полученными методами «D», «А» и «С» пропадает (рис. 7).

Тщательный анализ результатов моделирования показал, что уменьшение шага разбиения в методе «А» всегда позволяет добиться совпадения результатов моделирования с методом «С», а моделирование методом «D» требует особого выбора параметра усреднения.

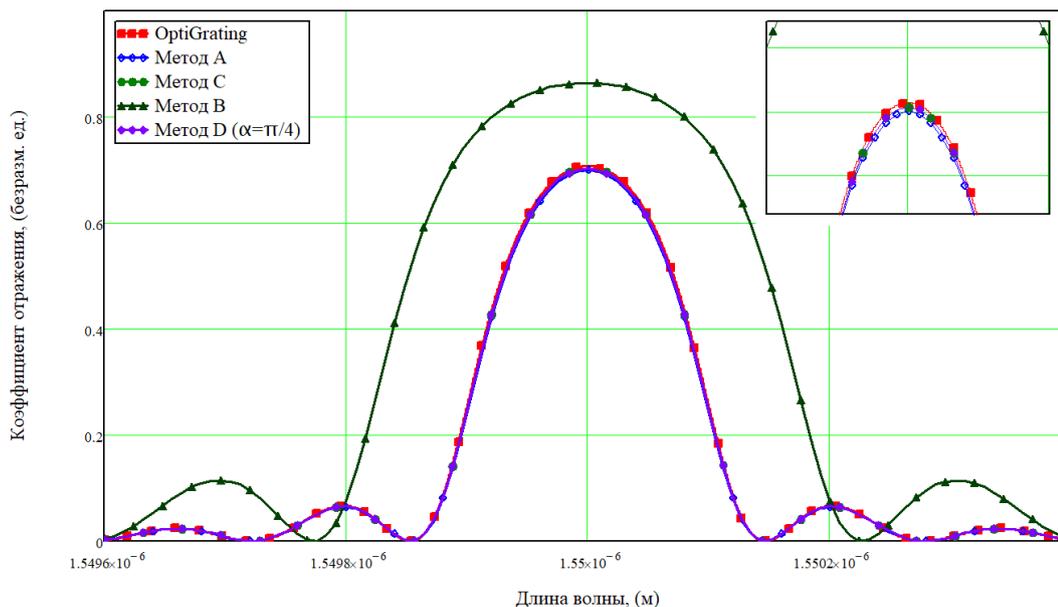


Рис. 7. Модель спектра отражения однородной ВБР, с параметрами  $H = 6$  мм,  $n_0 = 1.4682$ ,  $\Delta n = 0.0002$ , построенная в программном пакете OptiGrating, методами: «А» при  $\Delta z = 0.04 \times \Lambda$ ; «В»; «С»; и «D» при  $\alpha = \pi/4$

На момент написания статьи авторам не удалось найти объяснения этому факту, и авторы выражают готовность к открытой дискуссии с заинтересованными читателями по этой теме. В частности, остается открытым вопрос о правомерности использования такого же коэффициента усреднения для ВБР для расчета спектров отражения ВБР другой конфигурации, в частности, для аподизированных ВБР или ВБР с дискретными фазовыми неоднородностями.

## Выводы

Спектры отражения ВБР с простой конфигурацией, в частности, однородные и аподизированные ВБР, или ВБР с одной или несколькими дискретными фазовыми неоднородностями могут быть с успехом рассчитаны привлечением аппарата матриц передачи, который обеспечивает достаточную точность и подробность. Следует отметить, что математический аппарат матриц передач с некоторым расширением может быть распространен на расчет спектров отражения аподизированных и chirпированных ВБР, когда такая ВБР представляется в виде произведения матриц передачи однородных сегментов. Вместе с тем, существует широкий спектр задач, связанных с моделированием спектрального отклика слоистых структур, в которых аппарат матриц передач не применим. Например, две ВБР, с близкими, но не равными периодами, записанные на одном и том же участке оптического волокна, формируют бигармоническую зависимость наведенного показателя преломления, которая не периодична. Заменить такую структуру эквивалентным набором поочередно следующих друг за другом ВБР невозможно, а разбиения координатной сетки, которая совпадала бы одновременно сразу с двумя периодами ВБР не существует. В связи с этим, методы, использующие описание ВБР как слоистую структуру, со слоями, совпадающими с полупериодом решетки, не применимы. Не смотря на большую вычислительную сложность, метод «А», остается единственным методом, позволяющим моделировать прохождения излучения через среду с произвольной зависимостью показателя преломления по толщине. Когда такая среда представляется в виде большого количества слоев (в общем случае разной толщины), внутри каждого из которых показатель преломления постоянен.

## Литература

1. Губайдуллин, Р.Р. Волоконно-оптическая система контроля температуры аккумуляторных батарей гибридных транспортных средств на основе адресных волоконных брэгговских структур с двумя идентичными сверхузкополосными спектрами отражения / Р.Р. Губайдуллин // в сб.: Актуальные проблемы инфотелекоммуникаций в науке и образовании (АПИНО 2020). IX Международная научно-техническая и научно-методическая конференция. Санкт-Петербург, СПГУТ им. проф. М.А. Бонч-Бруевича. - 2020. - С. 368–373.
2. Исмаилов, Т.А. Прецизионный компенсационный датчик температуры на основе дискретных термоэлектрических устройств / Т.А. Исмаилов, А.Ф. Крячко, Х.М. Гаджиев, Т.А. Челушкина, А.С. Шкурко // Датчики и системы. - 2019. - №3(234). - С.33-40.
3. Морозов, О.Г. Адресные волоконные брэгговские структуры в квазираспределённых радиофотонных сенсорных системах / О.Г. Морозов, А.Ж. Сахабутдинов // Компьютерная оптика. - 2019. - 43. - С. 535–543.
4. Липатников, К.А. Экспериментальное исследование волоконной брэгговской решетки с фазовым  $\pi$ -сдвигом как чувствительного элемента датчика температуры / К.А. Липатников, А.А. Кузнецов, Л.М. Фасхутдинов, И.И. Нуреев, А.Ж. Сахабутдинов // Фотон-Экспресс, 2019. - №6. - С.90-91. DOI: 10.24411/2308-6920-2019-16042
5. Agliullin, T.A. Multi-Sensory Strain Measurement Using Addressed Fiber Bragg Structures in Load Sensing Bearings / T.A. Agliullin, R.R. Gubaidullin, A.Zh.Sakhabutdinov // In Proceedings of the 2021 Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications, March 2021. - P. 1–5.
6. Gubaidullin, R.R. Mathematical Modeling of Optical Response of Address Fiber Bragg Structure Using Gauss Function / R.R. Gubaidullin, T.A.Agliullin, O.G. Morozov, A.Z. Sahabutdinov // Proc. SPIE 11516, Optical Technologies for Telecommunications 2019, 1151615(22 May 2020). <http://doi.org/10/1117/12/2557598>
7. Мисбахов, Рус. Ш. Волоконные брэгговские решетки с двумя фазовыми сдвигами как чувствительный элемент и инструмент мультиплексирования сенсорных сетей / Рус.Ш. Мисбахов, Рин.Ш. Мисбахов, О.Г. Морозов, И.И. Нуреев и др. // Инженерный вестник Дона. - 2017. - №3. - [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4343](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4343).
8. Мисбахов Рин.Ш. Радиофотонные адресные сенсорные системы на трехкомпонентных волоконных брэгговских структурах и их применение для решения задач интеллектуальной энергетики: диссертация ... доктора технических наук, Казань, 2020.
9. Шагидуллин, А.Р. Постановка задач проектирования волоконно-оптических комбинированных датчиков и многосенсорных систем для регионального мониторинга концентрации парниковых газов. / А.Р. Шагидуллин, О.Г. Морозов, А.Ж. Сахабутдинов, И.И. Нуреев, Ю.А. Тунакова // Вестник Поволжского государственного технологического университета. Серия: Радиотехнические и инфокоммуникационные системы. - 2022. - Вып.4. - P. 5267. DOI:10.25686/2306-2819.2021.4.52
10. Capmany, J. Novel Layer Peeling Algorithm for the Synthesis of Fiber Bragg Gratings Yielding Smoother Fabrication Profiles / J. Capmany, S. Sales, M.A. Muriel, J.J. Rubio // In Proceedings of the Optical Fiber Communication Conference (2004), paper MF26; Optica Publishing Group, February 22 2004. - P. MF26.
11. Yamada, M. Analysis of Almost-Periodic Distributed Feedback Slab Waveguides via a Fundamental Matrix Approach / M. Yamada, K. Sakuda // Appl. Opt., AO 1987. -26. - 3474–3478. DOI:10.1364/AO.26.003474

12. Abdallah Ikhlef. Uniform Fiber Bragg Grating Modeling and Simulation Used Matrix Transfer Method / Ikhlef Abdallah, R.Hedara, M.Chikh-Bled // IJCSI. - 2012. - 9. - P. 368–374.
13. Raman Kashyap. Fiber Bragg Gratings; 2nd ed. / Kashyap Raman // Academic Press: Burlington, MA, 2010. ISBN 978-0-12-372579-0.
14. Хорохоров, А.М., Оввян, А.П. Расчет неоднородных брэгговских волоконных решеток / А.М. Хорохоров, А.П.Оввян // Молодежный Научно-Технический Вестник. - 2012. - С. 6–18.
15. Othonos, A. Fiber Bragg Gratings. Review of Scientific Instruments. - 1997. - 68. - 4309–4341. DOI:10.1063/1.1148392
16. Othonos, A.; Kalli, K. Fiber Bragg Gratings: Fundamentals and Applications in Telecommunications and Sensing; Illustrated edition.; Artech House Print on Demand: Boston, Mass, 1999; ISBN 978-0-89006-344-6.
17. Erdogan, T. Fiber Grating Spectra / T. Erdogan // J. Lightwave Technol. - 1997. - 15. - 1277–1294. DOI:10.1109/50.618322
18. Quintana, J.; Rumpf, R.; Gonzalez, V. Modified Transfer Matrix Method Model for a Fiber Bragg Grating Strain Sensor in Polarization Maintaining Single Mode Optical Fiber.; Broquin, J.E., Nunzi Conti, G., Eds.; San Francisco, California, United States, March 8 2014.- P. 89881B.
19. Agrawal, G.P.; Bobeck, A.H. Modeling of Distributed Feedback Semiconductor Lasers with Axially-Varying Parameters / G.P. Agrawal, A.H. Bobeck // J. Quantum Electron. - IEEE. - 1988. - 24, 2407–2414. DOI:10.1109/3.14370

## SIMULATION OF THE REFLECTION SPECTRUM OF FIBER BRAGG GRATINGS AS A STRUCTURAL ELEMENT OF COMBINED FIBER-OPTIC SENSORS

*T.A. Agliullin, V.I. Anfinogentov, B.I. Valeev, A.I. Sadykova, A.Zh. Sakhabutdinov*

Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev - KAI  
10, K. Marx, Kazan, 420111, Russian Federation

**Annotation.** The paper investigates and compares methods for forming the spectral response of a fiber Bragg grating (FBG), based on determining the reflection and transmission coefficients of plane waves through layered structures, followed by solving a system of linear equations for the transmission and reflection coefficients in each layer by the sweep method. Methods based on the construction of transfer matrices for the FBG as a whole, the output of the recording form of which differs or is not complete in a variety of sources, are studied. For a comparative analysis, two dependencies of the reflection coefficient on the wavelength for a homogeneous FBG, as often cited in various publications, are chosen. The dependencies of the FBG reflection coefficients, which are formed on the basis of the transmission matrix, which has Chebyshev polynomials of the second kind in its structure, are excluded from consideration. Modeling options based on recurrence relations, including the need to calculate Chebyshev polynomials, were deliberately excluded from consideration, since they do not benefit in performance compared to the method of transmission and reflection coefficients. A modification of the method of reflection and transmission coefficients has been proposed and studied, which involves modeling FBGs by a layered structure, representing FBGs as a set of "light" and "dark" layers, allows reducing the number of layers of the simulated layered structure to the number of FBG half-periods, and is reduced to successive multiplication of two-dimensional matrices.

**Keywords:** mathematical modeling, fiber Bragg structures, transfer matrix, plane waves in an inhomogeneous medium.

Статья отправлена в редакцию 30 сентября 2022 г.