

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СВЧ-СТРУКТУР БРЭГГОВСКОГО ТИПА, ВЫПОЛНЕННЫХ В КООКСИАЛЬНЫХ ЛИНИЯХ

*А.Р. Насыбуллин, Р.В. Фархутдинов, Т.М. Ишкаев,
М.С. Голованов, К.И. Евгеньев*

Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева – КАИ
Российская Федерация, 420111, г. Казань, ул. Карла Маркса, 10

Аннотация. В статье представлен метод математического описания электродинамических структур в виде каскадного соединения отрезков коаксиальных линий, различающихся формой поперечного сечения и диэлектрическим заполнением. Такие структуры можно отнести к классу периодических СВЧ-структур брэгговского типа, если выполняется условие соизмеримости рабочих длин волн с пространственным периодом. Они обладают широкими перспективами использования в качестве преобразовательных элементов в задачах измерения и контроля диэлектрических характеристик различных материалов и веществ. Предлагаемый в статье метод, в основе которого лежит принцип замещающего моделирования, отличается тем, что выражения, получаемые для нахождения интересующих характеристик структуры, представляют собой относительно простые математические выражения в аналитической форме, что позволяет их использовать как в задачах анализа, так и синтеза. Показана хорошая сходимость результатов, полученных предложенным методом, с результатами расчетов численными методами электродинамики, реализованными в программе электромагнитного моделирования.

Ключевые слова: периодические СВЧ-структуры, комплексная диэлектрическая проницаемость, коаксиальные линии, неоднородности, нерегулярности, численные методы электродинамики, замещающее моделирование.

Введение

Периодические СВЧ-структуры брэгговского типа (ПСВЧСБТ) активно применяются в качестве преобразовательных элементов в устройствах измерения электрофизических характеристик широкого спектра материалов и веществ [1-7]. Такие структуры могут быть сформированы в различных типах линий передачи и волноводах, среди которых наибольшее распространение получили волноводы прямоугольного сечения, коаксиальные и полосковые линии. ПСВЧСБТ в коаксиальном исполнении преимущественно использовались в задачах определения диэлектрических параметров жидкостей и сыпучих сред. Конструктивно периодические коаксиальные структуры могут быть выполнены в обширном количестве вариантов, в которых элементы, формирующие неоднородности, представлены как проводящими, так и диэлектрическими включениями. С целью выбора наиболее предпочтительных конструкций для решения каждой частной измерительной задачи, потребуются математические методы описания СВЧ-устройств, обладающие достаточной точностью, универсальностью и быстродействием. В настоящей статье решается задача формулирования нового метода моделирования периодических СВЧ-структур, обладающего точностью, не уступающей численным методам электродинамики, и быстродействием, сравнимым с классическими одноволновыми методами СВЧ цепей.

Математические модели электродинамических структур, выполняющих функции преобразовательных элементов, применяются на различных этапах исследования и

разработки измерительных устройств. На основе математических моделей производится анализ, синтез и оптимизация структур, также они привлекаются при формулировании уравнений измерений и используются непосредственно в задаче определения результата измерения. На каждом этапе могут присутствовать различные типы моделей в зависимости от требуемой точности, имеющихся вычислительных ресурсов и предпочтительной формы определяющих математических выражений. Расчет частотных характеристик коэффициентов рассеяния элементов, представляющих собой сложные электродинамические устройства на основе неоднородных линий, которыми в общем случае и являются преобразовательные элементы в виде периодических СВЧ-структур брэгговского типа, сопряжен с рядом трудностей. Если подходить к этой проблеме с классической точки зрения, то, как и в любой электродинамической задаче, можно выделить три группы методов решения: аналитические, численные и численно-аналитические. Недостатком аналитических методов является ограниченный круг описываемых структур, характеризующихся простой конфигурацией, например, линий передачи с каноническими формами сечений [8-11]. В большинстве случаев результат для сложных элементов будет приближенный. Тем не менее для предварительных оценок характеристик разрабатываемых электродинамических элементов такие методы бывают полезны. К численным методам будем преимущественно относить те, которые основаны на численном решении основных уравнений электродинамики в дифференциальной форме по определенной сеточной схеме, например, метод конечных разностей и метод конечных элементов, а также их модификации. С их помощью можно оценить параметры СВЧ-устройств сложных с точки зрения геометрии и характеристик применяемых материалов [12-16]. Значительные вычислительные затраты и сложность их внедрения в алгоритмы восстановления диэлектрических параметров, затрудняет их использование в вычислительном обеспечении датчиков на основе СВЧ-структур, но позволяет с высокой точностью провести анализ характеристик структуры с конфигурацией максимально приближенной к реальной. К численно-аналитическим обычно относят методы, которые подразумевают ряд аналитических преобразований для получения определяющих уравнений надлежащей формы, удобной для последующего сведения исходных дифференциальных или интегральных уравнений к системе алгебраических уравнений. Наиболее распространенными численно-аналитическими методами можно назвать метод моментов (метод интегральных уравнений) [18-19], метод частичных областей [20], метод интегро-дифференциальных уравнений [21,22], спектральный метод [19], метод линий [16, 19], TLM-метод [16]. Численные и численно-аналитические методы характеризуются высокой точностью, но требовательны к вычислительным ресурсам. По этой причине они наиболее востребованы в анализе рассматриваемых электродинамических объектов. В задачах синтеза, оптимизации и решения обратных задач применение численных и численно-аналитических подходов сопряжено с трудностями алгоритмизации и увеличением продолжительности вычислений.

Для преодоления проблем существующих методов применительно к описанию ПСВЧСБТ, выполненных в коаксиальных линиях, в статье предлагается комбинированный метод, использующий приближенные аналитические модели и результаты расчетов численными и численно-аналитическими методами. По своей идеологии такой подход близок к замещающему моделированию, с недавнего времени проникшему и в практику СВЧ инженерии [23, 24]. В замещающем моделировании выбранная из физических соображений приближенная модель подстраивается по результатам сравнения с более точной моделью или результатами экспериментов. Уточненная приближенная модель, называемая замещающей (или суррогатной) в идеале должна повторить эффективность более точной модели и быстродействие приближенной. Применительно к построению математических моделей периодических СВЧ-структур брэгговского типа, реализованных

в линиях с ТЕМ или квази-ТЕМ волной, применение замещающего моделирования можно сформулировать следующим образом: на основе одного из классических декомпозиционных методов теории СВЧ цепей строится приближенная модель периодической структуры, включающей приближенные модели линий и структурных неоднородностей. Далее возможны две ситуации: каждый элемент приближенной модели подстраивается в отдельности по результатам сравнения с численными моделями, либо за точную модель берется результат численного моделирования всей брэгговской структуры и подстраиваются одновременно все составляющие приближенной модели. Удобство такого подхода связано еще и с тем, что замещающая модель может повторно уточняться исходя из результатов измерений каждой индивидуальной структуры. Похожая процедура расчета описывается в [25] для решения задач оптимизации СВЧ устройств с ТЕМ-волной.

В первом разделе статьи раскрывается заложенный в основе метода матричный способ представления кусочно-однородных и кусочно-регулярных отрезков коаксиальных линий при предположении существования в них только основного типа волны (в одноволновом приближении). Такой способ позволяет задавать отдельно модели однородных участков линий и сосредоточенных неоднородностей, возникающих в точках перехода между однородными участками. Новизной метода представляется уточнение этих моделей исходя из сравнения с результатами численных расчетов в программе электромагнитного моделирования. Уточнение моделей однородных участков проводится для вариантов так называемых полукрытых коаксиальных линий, для которых отсутствуют описывающие выражения в замкнутой форме. Во втором разделе представлены результаты моделирования различных конфигураций ПСВЧСБТ, выполненных в закрытых и полукрытых коаксиальных линиях. Проводится сравнение результатов моделирования предложенным методом с полученными в программе электромагнитного моделирования. В заключении формулируются и обсуждаются выводы по статье.

1. Принципы построения математических моделей коаксиальных периодических СВЧ-структур брэгговского типа в одноволновом приближении

Предложенный выше метод применим к описанию периодических СВЧ-структур брэгговского типа (ПСВЧСБТ), реализованных в любом типе линии передачи. Настоящая статья иллюстрирует применение метода замещающего моделирования для построения моделей коаксиальных периодических структур в виде каскадного соединения отрезков линий, различающихся формой поперечного сечения и диэлектрическим заполнением. В качестве основы для построения математической модели такой кусочно-однородной и кусочно-регулярной линии могут выступать различные методы расчета СВЧ цепей: метод трансформации импеданса (рекуррентных соотношений), метод ориентированных графов, метод волновых матриц передачи, метод классических матриц передачи (АВСВ-матриц) и другие. Все перечисленные методы могут быть использованы для описания коаксиальных периодических структур, но с практической точки зрения наиболее удобным представляется метод ABCD-матриц, допускающий возможность простых матричных операций добавления и исключения участков цепей. Такие процедуры играют большую роль при нахождении эквивалентных схем нерегулярностей и в процессе калибровки.

Рассмотрим метод ABCD-матриц применительно к коаксиальной структуре со ступенчатыми нерегулярностями и неоднородностями. Пусть коаксиальный волновод состоит из периодической последовательности каскадно-соединенных одинаковых элементарных ячеек, конфигурация которых показана на рисунке 1. Элементарная ячейка состоит из трех участков, два из которых, обозначенных на рисунке 1 как I и III, являются

идентичными и обладают длиной $k\Lambda/2$, где Λ – период и $k \in (0,1)$. Участок под номером II имеет длину $(1-k)\Lambda$. Каждый участок характеризуется радиусом внутреннего проводника a_i и диэлектрическим заполнением с относительной комплексной диэлектрической проницаемостью ϵ_{ri} ($i=1,2$). Радиус внешнего проводника b одинаков для всех участков.

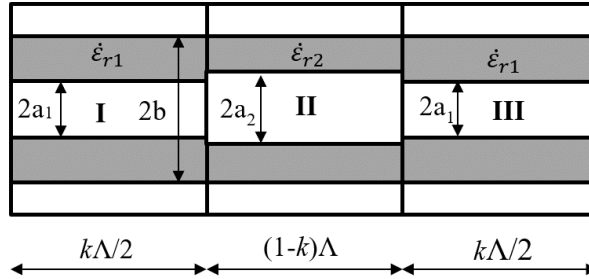


Рис.1. Элементарная ячейка коаксиальной периодической структуры

В пределах каждого участка вдоль продольной оси волновода поперечные размеры и параметры диэлектрика неизменны, а на границе участков изменяются скачкообразно. Как известно, на границе двух линий с различными диаметрами проводников возникают быстрозатухающие высшие моды, приводящие к накоплению реактивной энергии в этом сечении. Возникновение высших типов волн в граничном сечении может быть учтено введением эквивалентной схемы неоднородности в виде параллельной проводимости, значение которой зависит от частоты и параметров неоднородности.

ABCD-матрица элементарной ячейки находится как результат перемножения следующих матриц:

$$[\mathbf{ABCD}_3] = [\mathbf{ABCD}_I][\mathbf{ABCD}_{I-II}][\mathbf{ABCD}_{II}][\mathbf{ABCD}_{II-III}][\mathbf{ABCD}_{III}] \quad (1)$$

где $[\mathbf{ABCD}_3]$ – классическая матрица передачи элементарной ячейки, $[\mathbf{ABCD}_I] = [\mathbf{ABCD}_{III}]$ – классическая матрица передачи 1-ого и 3-го участков, $[\mathbf{ABCD}_{II}]$ – классическая матрица передачи 2-го участка, $[\mathbf{ABCD}_{I-II}]$ – классическая матрица передачи эквивалентной проводимости скачкообразной неоднородности между 1-м и 2-м участком, $[\mathbf{ABCD}_{II-III}]$ – классическая матрица передачи эквивалентной проводимости скачкообразной неоднородности между 2-м и 3-м участком. Из рисунка 1 видно, что $[\mathbf{ABCD}_{I-II}] = [\mathbf{ABCD}_{II-III}]$. Подставляя выражения для отдельных матриц, получаем:

$$[\mathbf{ABCD}_3] = \begin{bmatrix} ch\left(\frac{\dot{\gamma}_1 k \Lambda}{2}\right) & \dot{W}_{01} sh\left(\frac{\dot{\gamma}_1 k \Lambda}{2}\right) \\ \frac{sh\left(\frac{\dot{\gamma}_1 k \Lambda}{2}\right)}{\dot{W}_{01}} & ch\left(\frac{\dot{\gamma}_1 k \Lambda}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dot{Y}_{ш} & 1 \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} ch(\dot{\gamma}_2(1-k)\Lambda) & \dot{W}_{02} sh(\dot{\gamma}_2(1-k)\Lambda) \\ \frac{sh(\dot{\gamma}_2(1-k)\Lambda)}{\dot{W}_{02}} & ch(\dot{\gamma}_2(1-k)\Lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dot{Y}_{ш} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ch\left(\frac{\dot{\gamma}_1 k \Lambda}{2}\right) & \dot{W}_{01} sh\left(\frac{\dot{\gamma}_1 k \Lambda}{2}\right) \\ \frac{sh\left(\frac{\dot{\gamma}_1 k \Lambda}{2}\right)}{\dot{W}_{01}} & ch\left(\frac{\dot{\gamma}_1 k \Lambda}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где $\dot{\gamma}_i = j \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{ri}}$ – комплексный коэффициент распространения, $\dot{W}_{0i} = Z_{0i} / \sqrt{\epsilon_{ri}}$ – комплексное волновое сопротивление, Z_{0i} – вещественное волновое сопротивление ($i=1,2$). Проводимость $\dot{Y}_{ш}$ характеризует эквивалентную комплексную проводимость скачкообразного перехода между двумя участками. Комплексный характер этой

проводимости объясняется существованием потерь в диэлектриках, заполняющих внутреннее пространство линии.

Общая матрица передачи всей ПСВЧСБТ рассчитывается как

$$[ABCD] = [ABCD_0]^N, \quad (3)$$

где N – количество элементарных ячеек в коаксиальной ПСВЧСБТ. Переход к матрице рассеяния производится с помощью известных соотношений матричной теории СВЧ цепей.

Сложность расчета эквивалентных цепей для нерегулярностей в коаксиальном волноводе будет во многом определяться формой самих нерегулярностей. Как было ранее замечено, наиболее сложны в анализе нерегулярности и неоднородности из проводящих и диэлектрических материалов некоординатной формы. В таких случаях единственным способом, дающим удовлетворительные результаты, являются численные методы. Для вариантов нерегулярностей с координатной формой как на рисунке 1, существует множество других приближенных методов, например, основанные на вариационных принципах, согласовании мод, спектральном представлении и другие [19, 20]. Наиболее просты в моделировании структуры с нерегулярностями несложного вида, такие как скачок диаметра внутреннего и/или внешнего проводника, бесконечно тонкая диафрагма, а также их комбинации. Для удобства использования моделей нерегулярностей в последующем вычислении искомых диэлектрических параметров, следует стремиться к их описанию в виде функциональных зависимостей от частоты, параметров волновода, диэлектрической проницаемости. Такой подход может быть реализован с привлечением принципа представления в виде эквивалентных сосредоточенных электрических схем. Принцип построения матричной модели можно обобщить на более сложный вариант структуры, в которой в местах сочленения отрезков расположены искусственные сосредоточенные проводимости, например, в виде тонких диафрагм. В выражении (2) они будут учитываться более сложной формой представления $\hat{Y}_{ш}$.

В дальнейшем модели ПСВЧСБТ, полученные методом матриц передачи или другими методами теории СВЧ цепей, предполагающими распространение основного типа волны и содержащими описание реактивностей, обусловленных процессами возбуждения высших волн в местах сосредоточенных нерегулярностей, будем называть *одноволновыми*. В противоположность одноволновым, модели ПСВЧСБТ, основанные на численных методах электродинамики, будем называть *полноволновыми*, акцентируя факт возможности учета распространяющихся высших типов волн. Полноволновые модели периодических структур в большинстве случаев будут представлены результатами расчета в программе электродинамического моделирования CST STUDIO SUITE.

Другой немаловажной проблемой при синтезе и анализе ПСВЧСБТ является обеспечение регулярного режима распространения основного типа волны. Проблема усложняется в коаксиальном волноводе при увеличении измеряемых значений диэлектрической проницаемости исследуемых веществ. Решение данной проблемы, как и исследование свойств нерегулярностей и неоднородностей, требует тщательного рассмотрения характеристик высших типов волн, способных распространяться в коаксиальном волноводе.

Помимо основного типа волны – ТЕМ-волны, в коаксиальном волноводе с неизменной диэлектрической проницаемостью в поперечном сечении могут существовать бесконечное количество поперечно-электрических (ТЕ или Н-волн) и поперечно-магнитных (ТМ или Е-волн). Применимость одноволновых моделей линий предполагает, что априорно известно отсутствие при заданных параметрах линии распространяющихся высших типов волн. Поперечные волновые числа χ находятся из решения

соответствующего трансцендентного уравнения. Для Е-волн таким уравнением будет (4), а для Н-волн – (5).

$$J_m(x)N_m(\lambda x) - N_m(x)J_m(\lambda x) = 0, \quad (4)$$

$$(N_{m-1}(x) - N_{m+1}(x))(J_{m-1}(\lambda x) - J_{m+1}(\lambda x)) - \\ (N_{m-1}(\lambda x) - N_{m+1}(\lambda x))(J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x)) = 0, \quad (5)$$

где $x = \chi a$, $\lambda = b/a$, a – радиус внутреннего проводника, b – радиус внешнего проводника, $J_m(x)$ – функция Бесселя m -го порядка, $N_m(x)$ – функция Неймана m -го порядка. Стоит заметить, что уравнения (4) и (5) определены для проводников с бесконечной проводимостью и только приближенно описывают коаксиальные волноводы с реальными проводниками. Ориентировочные значения корней уравнений (4) и (5) можно найти в справочной литературе по специальным функциям, но для определенных значений a и b предлагаемые асимптотические выражения для корней становятся недопустимо отличными от истинных. В связи с этим указанные уравнения необходимо решать численным способом.

При нахождении моделей неоднородных СВЧ-структур, предназначенных для характеристики диэлектриков, необходимо выяснить при каких значениях диэлектрической проницаемости при заданных размерах коаксиальной линии на рассматриваемой частоте существует возможность распространения высших типов волн. Если же высшие волны находятся в области отсечки, определение продольного волнового числа покажет характер их затухания вблизи нерегулярностей и неоднородностей. Для этих целей проведем нахождение корней уравнений (4) и (5) для различных значений λ и ε_r . Расчет будем проводить численно с помощью метода квази-Ньютона с допуском сходимости 10^{-5} и определением начального приближения графическим способом.

Результаты расчетов корней выражений (4) и (5) представлены на рисунках 2 и 3 для первых высших волн электрического и магнитного типов, соответственно. Наименьшей критической частотой среди высших типов волн коаксиального волновода обладает волна H_{11} , но если в линии присутствуют только нерегулярности осесимметричного типа, то возбуждаться будут только высшие моды с осесимметричным распределением поля, среди которых наименьшую критическую частоту имеет волна E_{01} . Графики на указанных рисунках представляют зависимость произведения критической частоты волны $f_{кр}$ (Гц) и радиуса внутреннего проводника a (м) от b/a при различных значениях диэлектрической проницаемости диэлектрика волновода. Диэлектрик для простоты предполагается без потерь.

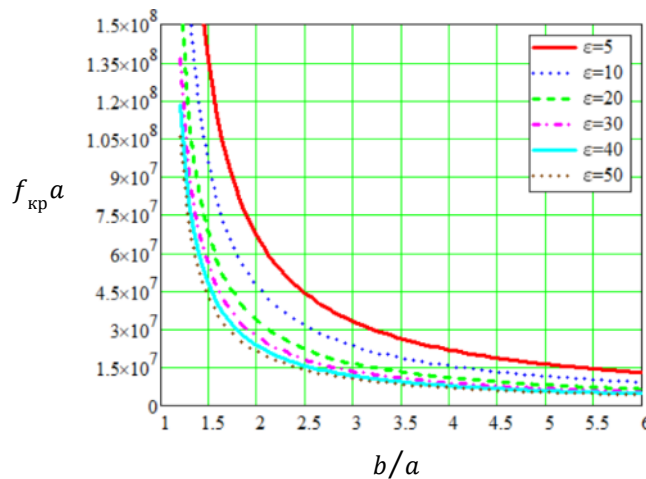
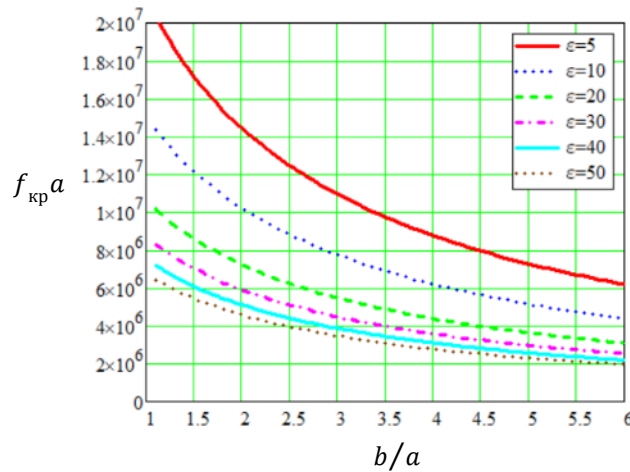


Рис. 2. Зависимость $f_{кр}a$ от b/a для волны E_{01}


 Рис. 3. Зависимость $f_{кр}a$ от b/a для волны H_{11}

Используя полученные графики можно приближенно оценить возможность появления в ПСВЧСБТ высших мод, когда ориентировочно известно значение измеряемой диэлектрической проницаемости и других диэлектриков в составе линии. Приближенно критическую частоту волны E_{01} можно оценить как

$$f_{кр} \approx \frac{1}{2} \frac{c}{Re(\sqrt{\epsilon_r})(b-a)}. \quad (6)$$

Математической моделью однородного отрезка коаксиальной линии выступает выражение для вещественного волнового сопротивления Z_0 . Для случая коаксиальной линии со сплошным внешним проводником используется классическое выражение

$$Z_{0close} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \quad (7)$$

Когда ПСВЧСБТ представляется как преобразовательный элемент датчика для измерения диэлектрической проницаемости, в некоторых случаях целесообразнее перейти к вариантам полукоткрытых коаксиальных линий [28], в которых внешний проводник не является замкнутым, но при этом до определенных частот обеспечивается одноволновый режим. В таких линиях облегчается доступ исследуемой среды во внутреннее пространство коаксиальной линии. Математическая модель полукоткрытой линии, как это предлагается в методе замещающего моделирования, может быть представлена как возмущенное выражение (7) в виде:

$$Z_{0open} = Z_{0close} + p(\vec{x}), \quad (8)$$

где $p(\vec{x})$ – полином заданной степени, зависящий от нескольких переменных (представленных как вектор $\vec{x}$), характеризующих геометрические параметры сечения полукоткрытой линии. Вид полинома и его коэффициенты определяются исходя из результатов сравнения с более точной численной моделью. Пример нахождения выражения (8) для варианта коаксиальной линии с внешним проводником в виде продольных стержней показан в [28].

Важным этапом при формировании модели периодической структуры выступает выбор математического описания скачкообразного перехода, среди возможных вариантов которого можно выделить два, названных в [25] одноволновой моделью и уточненной одноволновой моделью нерегулярности. В первой модели нерегулярность описывается матрицей рассеяния, соответствующей ступенчатому изменению волнового сопротивления линии ($\dot{Y}_{ш} = 0$ в (1)). В уточненной модели принимаются во внимание высшие типы волн,

возникающие в точке нерегулярности, и вводятся в соответствующую матрицу рассеяния как параллельно включенная в линию эквивалентная комплексная проводимость. Необходимость учета реактивностей обусловлена ухудшением точности одноволновой модели для определенных размеров ступенчатых нерегулярностей. Расчет эквивалентной проводимости основан на определении емкости, возникающей из-за накопления энергии высших мод. В качестве базовой выберем модель, предложенную Дж. Уиннери [29] для ряда ступенчатых коаксиальных нерегулярностей, позволяющей получить значение параллельно включенной в линию эквивалентной емкости, зависящей от геометрии нерегулярности и электрических параметров линии. Метод расчета основан на процедуре сшивания высших типов волн в сечении плоской неоднородности, в итоге приходим к выражению для отношения изменения тока в точке неоднородности к напряжению основной волны, то есть параллельной проводимости, которая в случае ступенчатого изменения радиуса внутреннего проводника имеет емкостной характер. В работе [30] пользуясь методом Уиннери сформированы выражения в замкнутой форме, приближенно описывающие эквивалентную емкость для данного типа нерегулярности. Воспользуемся данным выражением для уточнения одноволновой модели коаксиальной ПСВЧСБТ, выражение для емкости имеет следующий вид

$$C_d(\alpha, \tau) = \epsilon_{r1} C_{d0}(\alpha, \tau) = 2C_0 \pi b \epsilon_{r1} \left[\frac{\epsilon_0}{100\pi} \left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} \ln \left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right) - 2 \ln \left(\frac{4\alpha}{1 - \alpha^2} \right) \right) + \right] 10^2 \left[\frac{\Phi}{\text{М}} \right], \quad (9)$$

$$+ 1,11 \cdot 10^{-15} (1 - \alpha)(\tau - 1)$$

где $\tau = \frac{b}{a_1}$ и $\alpha = \frac{b - a_2}{b - a_1}$, параметры b , a_1 и a_2 соответствуют обозначениям на рисунке 1. В выражении (9) учитываются потери в среде, приводящие к возникновению параллельной активной проводимости $\omega C_{d0} \epsilon_{r1}''$. Коэффициент C_0 подбирается исходя из сравнения с численной полноволновой моделью нерегулярности.

Частотную зависимость емкости можно учесть с помощью эффекта возникновения первой высшей моды осесимметричного электрического типа E_{01} в коаксиальном волноводе [29]

$$C(f) = \frac{C_d(\alpha, \tau)}{\sqrt{1 - \left(\frac{2(b - a_1) \text{Re}(\sqrt{\epsilon_{r1}}) f}{c} \right)^2}}. \quad (10)$$

В выражениях (9) и (10) предполагается, что $a_2 > a_1$. В обратном случае в этих выражениях необходимо поменять местами a_1 и a_2 , а ϵ_{r1} заменить на ϵ_{r2} . Если ступенчатая нерегулярность используется в полукоткрытой линии, то в общем случае в выражении (9) вместо значения b должна использоваться функция, зависящая от параметров $\vec{x}$. Аналогично выражению (8) это может быть полином, степень которого не превышает 2, что достаточно для обеспечения приемлемой точности.

2. Результаты математического моделирования коаксиальных ПСВЧСБТ

Расчеты частотных характеристик ПСВЧСБТ начнем с коаксиальных линий, полностью заполненных одним диэлектриком. Основная цель моделирования состоит в оценке степени сходимости результатов расчета одноволновых и полноволновых моделей коаксиальных ПСВЧСБТ. Элементарная ячейка рассматриваемой ПСВЧСБТ аналогична изображенной на рисунке 1, для которой справедливо равенство $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = \epsilon_r$. Параметрами в задаче будут выступать отношение радиуса внешнего проводника к радиусу внутреннего проводника $\frac{b}{a_1}$, величина скачка радиусов внутреннего проводника $\frac{a_2}{a_1}$ и комплексная диэлектрическая проницаемость диэлектрика ϵ_r .

Проведем численный эксперимент по расчету частотных характеристик коаксиальной ПСВЧСБТ с параметрами $\Lambda=0,03$ м, $N=10$, $k=0,5$, $b=5$ мм, $a_1=1$ мм. В качестве варьируемых параметров будут выступать a_2 и ε_r' . Исходя из (6) на максимальной частоте анализа 8 ГГц значение ε_r' , при котором приблизительно будет возбуждаться первая высшая мода, составит $\varepsilon_r'=15$, поэтому зададим два значения диэлектрической проницаемости $\varepsilon_r'=\{5; 10\}$. Радиус внутреннего проводника a_2 будет принимать значения $a_2=\{1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4\}$ мм. Основной целью эксперимента представляется сравнение результатов одноволнового и полноволнового методов моделирования. Модель исследуемой структуры в программе электромагнитного моделирования CST STUDIO SUITE представлена на рисунке 4.

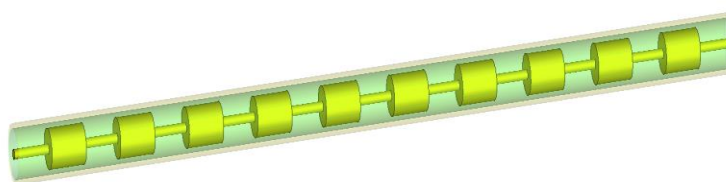


Рис. 4. Модель коаксиальной ПСВЧСБТ с нерегулярностями внутреннего проводника в программе электромагнитного моделирования

В программе CST STUDIO SUITE существуют два основных решателя: метод конечных разностей во временной области (МКРВО) и метод конечных элементов в частотной области (МКЭЧО), существенно отличающиеся с точки зрения математической формулировки. В практике компьютерного моделирования в первую очередь необходимо представлять какой из методов наиболее предпочтителен для решения поставленной задачи. МКРВО применяют в первую очередь для расчетов в широкой полосе частот характеристик электромагнитных структур, электрические размеры которых на максимальной расчетной частоте относительно не велики. Такие задачи решаются методом МКРВО с высокой точностью и приемлемой продолжительностью вычисления. В силу специфики алгоритма пространственной дискретизации применение данного метода затруднительно в решении задач с объектами, обладающими сложной формой геометрии, в особенности с криволинейными границами. Попытка воспользоваться МКРВО в этом случае приведет к необходимости уменьшать шаг дискретизации, тем самым увеличивая вычислительные затраты. Метод дискретизации, заложенный в основу МКЭЧО, более адаптирован к криволинейным поверхностям, поэтому для данного класса задач он будет предпочтительнее. Процедура расчета МКЭЧО будет усложняться с расширением полосы рабочих частот, приводящим к значительному увеличению продолжительности расчета.

Проведенная предварительная оценка результатов вычислений различными численными методами в программе CST STUDIO SUITE и одноволновым матричным методом характеристик структуры, изображенной на рисунке 4, показала хорошее приближение одноволнового метода с обоими численными методами. Тем не менее в результатах МКРВО проявляются ошибки моделирования, связанные с дискретизацией нерегулярных участков, характер которых можно увидеть на рисунке 5. Сходимость для МКЭЧО и одноволнового метода оказалась более выраженной, поэтому в дальнейшем моделирование коаксиальных ПСВЧСБТ преимущественно будет проведено МКЭЧО вычислителем.

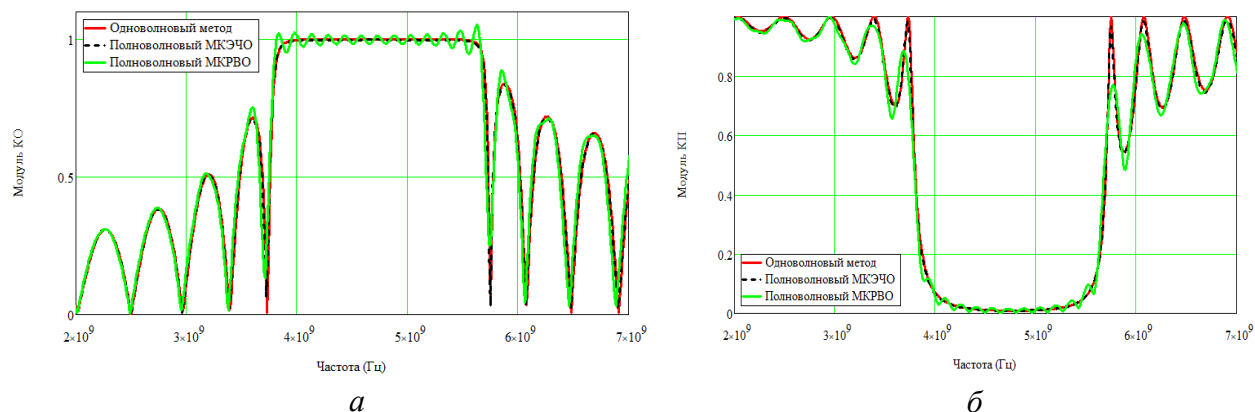


Рис. 5. Сравнение результатов расчета одноволновым, полноволновым методом МКЭЧО и полноволновым методом МКРВО: *a* – модуль коэффициента отражения; *б* – модуль коэффициента передачи

Целью вычислительного эксперимента выступало установление пределов применимости одноволновой модели коаксиальной ПСВЧСБТ, учитывающей реактивности, по отношению к описанию конструкций с различными величинами скачкообразных переходов между диаметрами внутреннего проводника. На первом этапе проведем сравнение результата расчета с помощью упрощенной одноволновой модели коаксиальной структуры без учета реактивностей с результатами численной модели в программе CST STUDIO SUITE. Рисунок 6 иллюстрирует графики, позволяющие провести сравнение. Как можно видеть, данная периодическая структура с введением сосредоточенных реактивностей перестает быть набором четвертьволновых отрезков, так как в характеристике начинают появляться полосы с четными номерами. Расположение нечетных полос заграждения также претерпевает изменение с добавлением реактивностей. Отсюда следует, что учет реактивностей ступенчатых неоднородностей в коаксиальной периодической структуре является неотъемлемым требованием при анализе и синтезе ПСВЧСБТ.

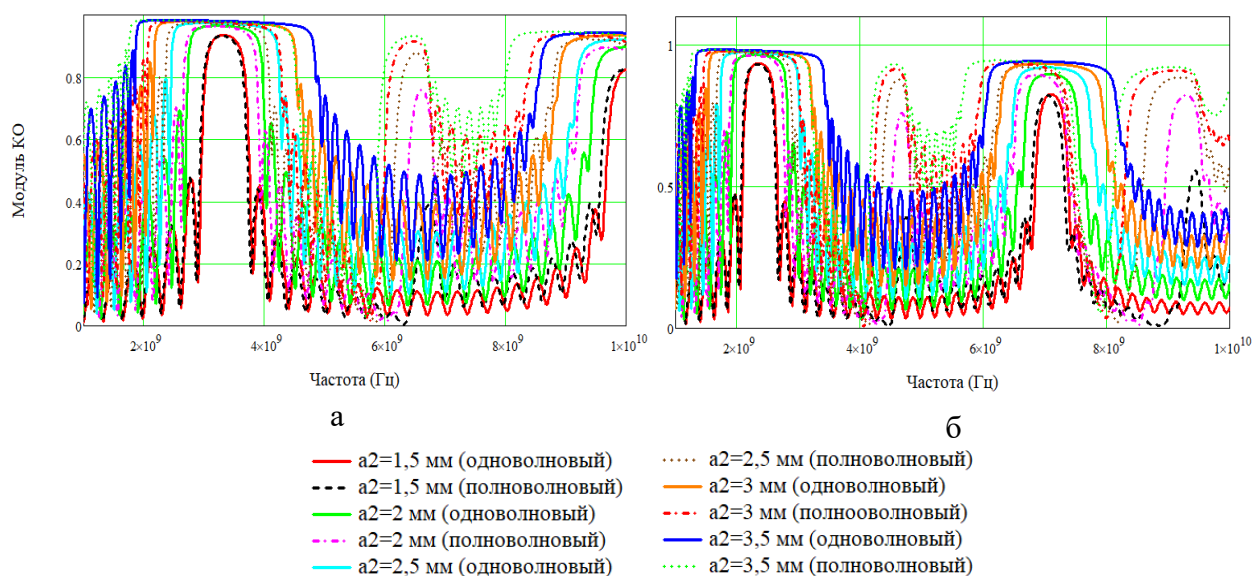


Рис. 6. Сравнение результатов расчета упрощенным одноволновым и полноволновым методами: *a* – для $\epsilon'_r = 5$; *б* – $\epsilon'_r = 10$

Одноволновая модель с сосредоточенными проводимостями, заданными в виде (10), обладает существенно большей точностью по сравнению с упрощенной моделью. Подтверждением этого служат результаты сравнения с характеристиками, полученными в программе численного электромагнитного моделирования, представленные на рисунке 7. Анализируя результаты, можно сделать вывод о наилучшей сходимости в областях нечетных полос заграждения. В четных полосах сходимость также высокая, но при малых скачках диаметра внутреннего проводника наблюдаются расхождения, скорее всего объясняемые малой точностью дискретизации численного метода в местах переходов. В целом расхождение в первой полосе заграждения для всех вариантов структур не хуже 1%. Время расчета предложенным методом в 20-30 раз меньше по сравнению с продолжительностью вычисления в программе CST STUDIO SUITE.

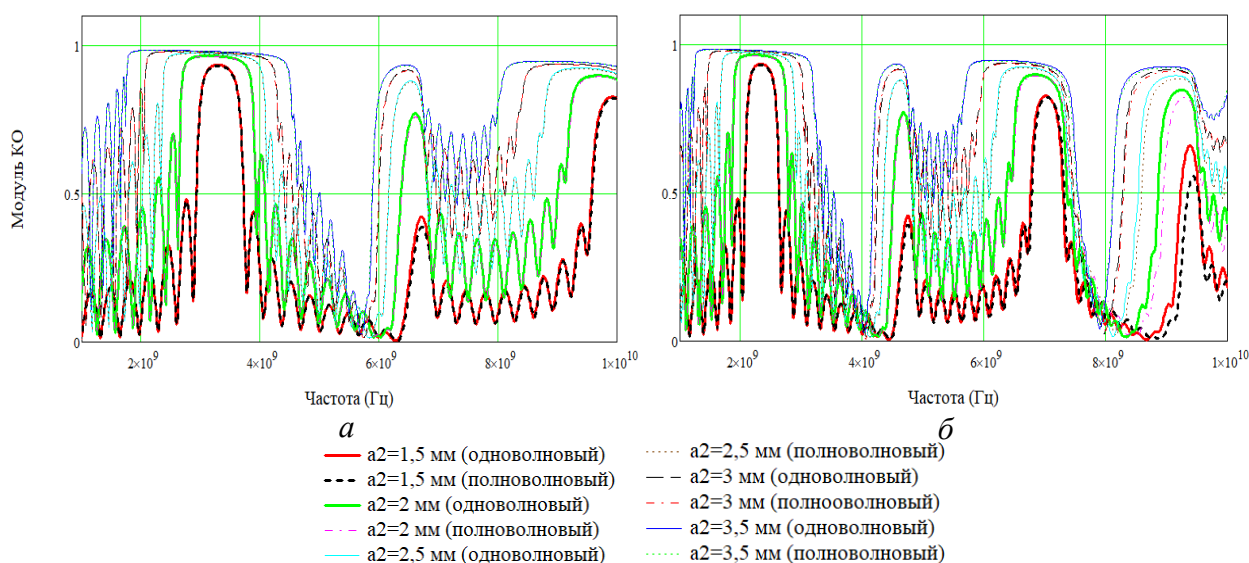


Рис. 7. Сравнение результатов расчета одноволновым и полноволновым методами:
а – для $\epsilon'_r=5$; б – $\epsilon'_r=10$

При проектировании преобразовательных элементов для диэлектрического контроля важно обеспечить работу сенсора в требуемом диапазоне изменения диэлектрической проницаемости на заданной частоте контроля. Коаксиальные ПСВЧСБТ с полным заполнением внутреннего пространства волновода не всегда удовлетворяют этим требованиям. При большом диапазоне изменения ϵ'_r частота контроля будет значительно меняться – если ϵ'_r увеличится в n раз, то частота контроля уменьшится в $\sqrt{n}$ раз. Решением проблемы могут выступать ПСВЧСБТ с частичным заполнением исследуемой средой, то есть в ней изначально присутствуют периодически расположенные диэлектрические шайбы с известной ϵ'_r . Возможное уменьшение чувствительности за счет сокращения удельного содержания в линии исследуемого диэлектрика может быть скомпенсировано введением скачкообразных переходов на границах между диэлектриками. Таким образом коаксиальная ПСВЧСБТ будет состоять из элементарных ячеек общего вида как на рис. 1.

Расчет коаксиальных ПСВЧСБТ общего вида в одноволновом приближении также требует учета реактивностей. К общему виду отнесем структуры как с изменением диаметра внутреннего проводника, так и диэлектрической проницаемости заполняющего диэлектрика. Аналогично проведенному ранее анализу влияния реактивностей повторим сравнение для структур данного класса. В качестве полноволновой модели будет выступать модель структуры в CST STUDIO SUITE, показанная на рисунке 8.

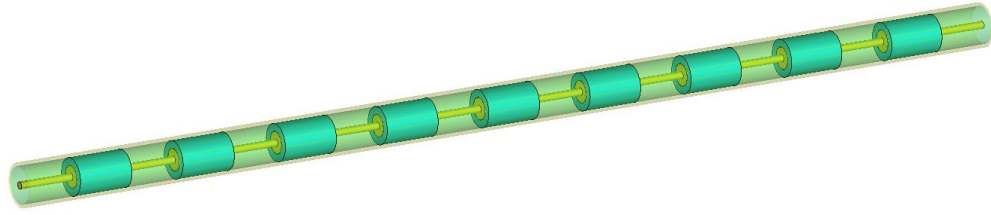


Рис. 8. Модель коаксиальной ПСВЧСБТ с нерегулярностями внутреннего проводника и неоднородностями диэлектрического заполнения в программе электромагнитного моделирования

Проведем расчет частотных характеристик коаксиальной ПСВЧСБТ, показанной на рисунке 8 и обладающей следующими параметрами $\Lambda=0,03$ м, $N=10$, $k=0,5$, $b=5$ мм, $a_1=1$ мм, $\varepsilon'_{r2} = 15$, $\varepsilon''_{r2} = 0,05$, $\varepsilon'_{r1}=10$, $\varepsilon''_{r1} = 0,1$ при изменении радиуса внутреннего проводника $a_2=\{1,5; 2; 3,5\}$ мм. Результаты расчета можно наблюдать на рисунке 9.

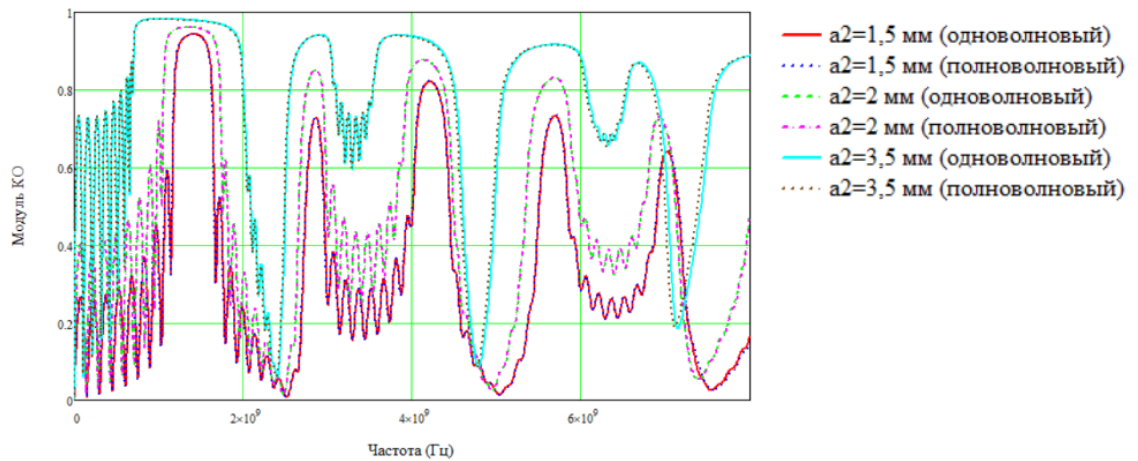


Рис. 9. Сравнение результатов расчета коаксиальной ПСВЧСБТ с нерегулярностями внутреннего проводника и неоднородностями диэлектрического заполнения одноволновым и полноволновым методами

Прослеживается высокая степень сходства характеристик вплоть до пятой полосы заграждения, что говорит об адекватности полноволновой модели, учитывающей реактивности. Дополнительные результаты сравнения различных методов расчета частотных характеристик коаксиальных ПСВЧСБТ можно найти в [31].

Аналогично закрытой коаксиальной линии с нерегулярностями внутреннего проводника можно показать результаты расчетов для полуоткрытой коаксиальной линии с внешним проводником в виде массива параллельных стержней. Математическая модель такой структуры должна учитывать реактивности, образующиеся в местах переходов. В качестве основы для модели нерегулярности можно воспользоваться выражением (10), в котором требуется произвести корректировку для значения радиуса внешнего проводника в зависимости от параметров полуоткрытой линии. Воспользовавшись результатами численного моделирования ряда вариантов размеров нерегулярностей в полуоткрытой линии, было получено аппроксимирующее выражение:

$$b = 1,38\underline{b} - 2,8 \cdot 10^{-4}N - 0,17d, \quad (11)$$

где все размеры взяты в мм, а определения входящих в выражение геометрических параметров можно найти в [28]. Точность выражения (11) не хуже 1%.

В качестве примера покажем сравнение результатов моделирования в программе электромагнитного моделирования и результатов, полученных в одноволновом приближении, для модели полукоткрытой линии с ступенчатыми неоднородностями диэлектрика и нерегулярностями внутреннего проводника (рисунок 10). Как и для закрытой коаксиальной линии заметна высокая сходимость, но незначительные отличия начинаются с правого склона первой полосы заграждения.

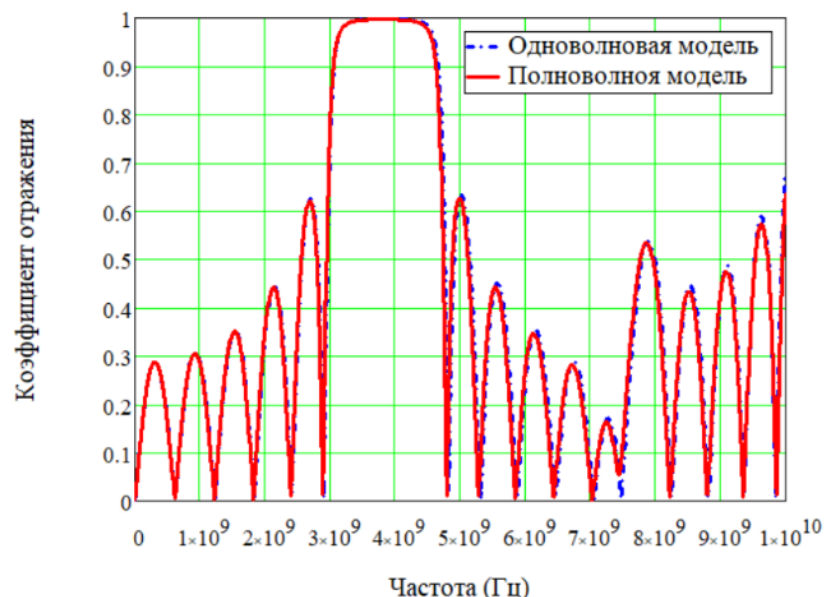


Рис. 10. Результаты расчетов полукоткрытой коаксиальной ПСВЧСБТ с неоднородностями диэлектрика и нерегулярностями центрального проводника

Заключение

В статье предложен метод моделирования ПСВЧСБТ, выполненных в коаксиальной линии, описывающий распространение электромагнитных волн в одноволновом приближении. В основе метода используется способ представления однородных отрезков линий передачи и сосредоточенных реактивностей с помощью классической матрицы передачи. Применение в методе частотно-зависимых моделей сосредоточенных реактивностей позволяет учесть эффекты возникновения нераспространяющихся высших типов волн. Отличительной особенностью метода представляется заложенная возможность уточнения моделей однородных участков и реактивностей по результатам сравнения с более точными численными методами, реализованными в программах электромагнитного моделирования. В качестве моделей однородных участков полукоткрытых коаксиальных линий в методе матриц выступают выражения для волнового сопротивления, уточнение которых происходит посредством добавления корректирующего члена в формулу для волнового сопротивления коаксиальной линии со сплошным внешним проводником. Для оценки диапазонов применимости предложенного метода проводились вычисления критических частот возникновения высших типов волн для структур с заданными электрическими и геометрическими параметрами.

Эффективность предложенного метода продемонстрирована в результате его сравнения с методом конечных элементов в частотной области, который наиболее точно из существующих численных методов электродинамики описывает электромагнитные процессы в коаксиальных периодических структурах. Показано, что игнорирование сосредоточенных реактивностей в модели линии существенно ухудшает точность расчета, особенно в области нечетных полос заграждения. По итогам сравнения результатов

расчетов частотных характеристик отражения различных вариантов коаксиальных закрытых и полукоткрытых структур установлена расхожимость не хуже 1% в области первой полосы заграждения при сокращении времени расчета в 20-30 раз.

Проиллюстрированный на примере коаксиальных структур принцип построения математических моделей периодических СВЧ-структур брэгговского типа позволяет получить математическую конструкцию, удобную для выполнения операций синтеза структур. Во многом это определяется простотой входящих в состав общей модели структуры аналитических моделей её составных элементов и значительным сокращением времени расчета по сравнению с численными методами.

Список источников

1. Насыбуллин, А.Р. Моделирование датчика на основе полосковой брэгговской СВЧ структуры для контроля степени полимеризации композитов / А.Р. Насыбуллин, Р.Ф. Шакиров, М.Э Вальяров и др. // Южно-сибирский научный вестник. – 2022. – №4 (45). – С. 3-8.
2. Насыбуллин, А.Р. Применение СВЧ брэгговских структур для измерения комплексной диэлектрической проницаемости / А. Р. Насыбуллин, Р. В. Фархутдинов, Т. М. Ишкаев, Р. Р. Самигуллин // Международный научно-исследовательский журнал. – 2020. – № 12-1(102). – С. 54-62.
3. Насыбуллин, А.Р. Средства измерительного контроля диэлектрических параметров жидкостей на основе периодических СВЧ структур / А.Р. Насыбуллин, Р.В. Фархутдинов, А.Ф. Сиразов // Научно-технический вестник Поволжья. – 2018. – № 12. – С. 159-162.
4. Насыбуллин, А.Р. Преобразовательные элементы на основе полосковых брэгговских структур для СВЧ датчиков параметров технологических процессов / А.Р. Насыбуллин // Научно-технический вестник Поволжья. – 2016. – № 3. – С. 129-131.
5. Усанов, Д.А., Использование сверхвысококачественной коаксиальной брэгговской структуры для измерения параметров диэлектриков / Усанов Д.А., Никитов С.А., Скрипаль А.В., Пономарев Д.В., Рузанов О.М., Тимофеев И.О. // Радиотехника и электроника. – 2020. – Т. 65. – № 5. – С. 495-503.
6. Усанов Д.А. СВЧ фотонные кристаллы - новый тип функциональных структур, применяемых в радиоэлектронике / Д.А. Усанов, А.В. Скрипаль, М.К. Мерданов, Д.В. Пономарев, С.Г. Евтеев // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2016. – Т.19, №3. – С. 17-24.
7. Усанов Д.А. СВЧ фотонные кристаллы. Новые сферы применения / Д.А. Усанов, М.К. Мерданов, А.В. Скрипаль, Д.В. Пономарев // Известия Саратовского Университета. Новая серия. Серия: Физика. – 2015. – Т.15, №1. – С. 57.-73.
8. Вайнштейн Л.А. Теория дифракции и метод факторизации / Л.А. Вайнштейн. – М.: Изд-во «Советское радио», 1966. – 431 с.
9. Каценеленбаум Б.З. Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами / Б.З. Каценеленбаум. – М.: Изд-во Академии наук СССР, 1961. – 217 с.
10. Левин Л. Теория волноводов. Методы решения волноводных задач / Л. Левин. – М.: «Радио и связь», 1981. – 312 с.
11. Миттра Р. Аналитические методы теории волноводов / Р. Миттра, С. Ли. – М.: Изд-во «Мир», 1974. – 327 с.
12. Григорьев А.Д. Методы вычислительной электродинамики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. – 432 с.

13. Volakis J.L. Finite Element Method For Electromagnetics. Antennas, Microwave Circuits, and Scattering Applications / J.L. Volakis, A. Chatterjee, L.C. Kempel. – Piscataway: IEEE Press, 1998. – 344 p.
14. Sevgi L. Electromagnetic Modeling and Simulation / L. Sevgi. – John Wiley & Sons, Inc, 2014. – 698 p.
15. Гринев А.Ю. Численные методы решения прикладных задач электродинамики. Учеб. пособие / А.Ю. Гринев. – М.: Радиотехника, 2012. – 336 с.
16. Sadiku M.N.O. Numerical techniques in electromagnetics / M.N.O. Sadiku. – Boca Raton: CRC Press, 2001. – 737 p.
17. Gibson W.C. The Method of Moments in Electromagnetics / W.C. Gibson. – N.-Y.: Chapman and Hall/CRC, 2008. – 272 p.
18. Harrington R.F. Field Computation by Moment Methods / R.F. Harrington. – N.-Y.: Krieger Publishing Co., Inc., 1968. – 226 p.
19. Itoh T. (Ed.) Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-Wave Passive Structures / T. Itoh. – N.-Y.: John Wiley & Sons, Inc, 1989. – 707 p.
20. Иларионов Ю. А. Устройства СВЧ- и КВЧ- диапазонов. Методы расчета. Алгоритмы. Технологии изготовления. Монография / Ю.А. Иларионов, А.С. Раевский, С.Б. Раевский, А.Ю. Седаков – М.: Радиотехника 2013. – 752 с.
21. Раевский, С.Б. Интегральные представления в краевых задачах о расчете устройств СВЧ- и КВЧ-диапазонов / С.Б. Раевский, С.А. Капустин, А.С. Раевский // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2020. – Т. 23. – № 4. – С. 8-18.
22. Раевский, А.С. Метод интегральных уравнений для расчета нерегулярных волноводов на основе обобщенной леммы Лоренца / А.С. Раевский, С.Б. Раевский, А.Ю. Седаков, А.А. Титаренко // Радиотехника и электроника. – 2019. – Т. 64. – № 11. – С. 1079-1087.
23. Koziel, S. Physics-Based Surrogates for Low-Cost Modeling of Microwave Structures/ S. Koziel, S. Ogurtsov, L. Leifsson // Procedia Computer Science. – 2013. – 18. – P. 869 – 878.
24. Сычев, А.Н. Оптимальный синтез интегральных СВЧ-устройств на основе замещающего моделирования. Обзор / А.Н. Сычев, В.А. Шестаков // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. – 2010. – № 2-1(22). – С. 81-85.
25. Кац, Б. М. Оптимальный синтез устройств СВЧ с Т-волнами / Под редакцией В.П. Мещанова. – М.: Радио и связь, 1984. – 288 с.
26. Marcuvitz N. Waveguide handbook / N. Marcuvitz. – Peter Peregrinus Ltd, 1984. – 427 p.
27. Collin R.E. Foundations for microwave engineering. Second edition / R.E. Collin. – A John Wiley & Sons, Inc, 2001. – 924 p.
28. Насыбуллин, А.Р. Сверхвысокочастотные брэгговские структуры в полукоткрытой коаксиальной линии / А.Р. Насыбуллин, О.Г. Морозов, Р.В. Фархутдинов и др. // Вопросы радиоэлектроники. – 2021. – № 1 (50). – С. 4-12.
29. Whinnery, J.R. Equivalent Circuits for Discontinuities in Transmission Lines / J.R. Whinnery, H.W. Jamieson // Proceedings of the I.R.E. – 1944. – P. 98-114.
30. Somlo, P.I. The Computation of Coaxial Line Step Capacitances / P.I. Somlo // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1967. – Vol. 15. – P. 48-53.
31. Насыбуллин, А.Р. Анализ влияния ступенчатых нерегулярностей внутреннего проводника на частотные характеристики кусочно-однородной брэгговской СВЧ структуры в коаксиальном волноводе / А.Р. Насыбуллин, В.А. Ефимов, М.Э. Вальяров, и др. // Инженерный вестник Дона. – 2022. – № 7 (91) – Режим доступа: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n7y2022/7811

MATHEMATICAL MODELING OF PERIODIC BRAGG-TYPE MICROWAVE STRUCTURES MADE IN COAXIAL LINES

*A.R. Nasybullin, R.V. Farkhutdinov, T.M. Ishkaev,
M.S. Golovanov, K.I. Evgeniev*

Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev-KAI
10, st. K. Marx, Kazan, 420111, Russian Federation

Abstract. The article presents a method for the mathematical description of electrodynamic structures in the form of a cascade connection of segments of coaxial lines that differ in cross-sectional shape and dielectric filling. Such structures can be attributed to the class of periodic Bragg-type microwave structures if the condition of commensurability of the operating wavelengths with the spatial period is satisfied. They have broad prospects for use as transducer elements in the problems of measuring and controlling the dielectric characteristics of various materials and substances. The method proposed in the article, which is based on the principle of substitutive modeling, differs in that the expressions obtained for finding the structure characteristics of interest are relatively simple mathematical expressions in an analytical form, which allows them to be used both in analysis and synthesis problems. Good convergence of the results obtained by the proposed method with the results of calculations by numerical methods of electrodynamics implemented in the electromagnetic simulation program is shown.

Keywords: periodic microwave structures, complex permittivity, coaxial lines, inhomogeneities, irregularities, numerical methods of electrodynamics, replacement modeling.

Статья представлена в редакцию 15 июля 2023 г.