УДК 621.39:519.6 *2.2.13*

ОСОБЕННОСТИ ПАРАМЕТРОВ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ L – МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ И ВИДЕОСИГНАЛОВ

Л.Ю. Фадеева, К.Д. Зиновьев

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ.
Российская Федерация, 420111, г. Казань, ул. К. Маркса, 10

Аннотация. Впервые задачи экстраполяции и фильтрации случайных процессов и полей были поставлены в середине 20-го века академиком А.Н. Колмогоровым. Одновременно с А.Н. Колмогоровым этой проблемой занимался американский математик Н. Винер, которому удалось выделить достаточно широкий класс процессов, для которых возможно получение явных экстраполяционных формул. Это процессы с рациональной спектральной плотностью. Впоследствии этот класс был расширен последователями А.Н. Колмогорова до класса квазирациональных спектральных плотностей, главной составляющей частью которых являются квазиполиномы с корнями в верхней полуплоскости. Поэтому проблема построения таких квазиполиномов является крайне актуальной. В данной работе на основе метода Чеботарева и обобщенной теоремы Штурма получены необходимые и достаточные условия принадлежности к верхней полуплоскости корней квазиполиномов, образующих спектральные плотности видеосигналов и L – марковских процессов. Этот факт играет весьма важную роль при построении наилучших линейных экстраполяторов и операторов фильтрации для этих процессов.

Ключевые слова: видеосигнал, L – марковский процесс, спектральная плотность, метод Чеботарева – Меймана, обобщенная теорема Штурма.

Введение

К необходимости изучения задач экстраполяции, интерполяции и фильтрации случайных процессов и полей приводят проблемы в различных областях науки и техники. В теории информации это проблема синтеза оптимальных систем передачи информации, в радиотехнике – проблема передачи, приема, экстраполяции и фильтрации сигналов, в теории систем автоматического управления – проблема синтеза фильтров и т.п. Одним из перспективных математических методов решения подобных задач также является спектральное оценивание случайных процессов.

Как известно, случайные процессы с квазирациональной спектральной плотностью вида

$$f_1(\omega)=\frac{\left|\sum_{k=0}^{n} Q_k(\omega)e^{-i\omega g_k}\right|^2}{\left|Q(\omega)\right|^2}=\frac{\left|G(\omega)\right|^2}{\left|Q(\omega)\right|^2} \tag{1}$$

являются спектральными плотностями видеосигналов, а функции вида

$$f_2(\omega)=\frac{\left|Q(\omega)\right|^2}{\left|\sum_{k=0}^{n} Q_k(\omega)e^{-i\omega g_k}\right|^2}=\frac{\left|Q(\omega)\right|^2}{\left|G(\omega)\right|^2} \tag{2}$$

– спектральными плотностями L – марковских процессов.

При этом предполагается, что $Q_k(\omega)$, $Q(\omega)$, $k = 0, 1, 2 \ldots n$ – многочлены; g_k – действительные числа и все корни полинома $G(\omega)$ расположены в открытой верхней полуплоскости.

Это предположение играет существенную роль при построении спектральных характеристик экстраполяции и фильтрации.

Задачи экстраполяции и фильтрации случайных процессов были поставлены в середине 20-го века академиком А.Н. Колмогоровым [1]. Одновременно с ним этой проблемой занимался американский математик, основоположник кибернетики и искусственного интеллекта Н. Винер [2]. Он показал, что для класса случайных процессов с рациональной спектральной плотностью вида

$$f_3(\omega) = \frac{|M(\omega)|^2}{|Q(\omega)|^2}, \tag{3}$$

где $Q(\omega)$, $M(\omega)$ – полиномы, можно получить формулы операторов экстраполяции и фильтрации в явном виде. Однако, строгого доказательства полученных формул Н. Винером дано не было. Доказательство было получено только учеником А.Н. Колмогорова А.М. Ягломом, идея которого заключалась в том, что спектральную плотность случайного процесса, а также все другие функции, связанные с ней в процессе исследования, следует продолжить с вещественной оси на комплексную плоскость и рассматривать их как аналитические функции комплексного переменного [3]. Благодаря этой идее А.М. Яглому удалось не только получить строгое доказательство экстраполяционных формул Н. Винера, но и построить формулы экстраполяции для некоторых узких классов нерациональных спектральных плотностей. Впоследствии благодаря методу А.М. Яглома были получены интересные экстраполяционные результаты советским математиком С.В. Григорьевым [4] и югославским математиком Д. Малишичем [5], которые привели А.М. Яглома к идее о рассмотрении спектральных плотностей вида (1) и (2), в которых квазиполином $G(\omega)$ имеет все корни только в верхней полуплоскости. Очевидно, что классы (1) и (2) существенно расширяют и обобщают класс процессов с рациональным спектром (3). Он предположил, что для таких спектральных плотностей могут быть получены в явном виде формулы экстраполяции и фильтрации. Авторы в своих работах отчасти подтвердили правильность этой гипотезы, построив явные экстраполяционные формулы для L – марковских процессов с квазирациональным спектром [6-7] и формулы оператора фильтрации для процессов с таким же спектром [8].

Поэтому проблема построения квазиполиномов с корнями в верхней полуплоскости является крайне актуальной.

Целью данной работы является получение необходимых и достаточных условий принадлежности корней квазиполиномов $G(\omega)$, являющихся главной составляющей частью спектральных плотностей некоторых классов видеосигналов и L – марковских процессов, к верхней полуплоскости H^+ .

Решение задачи о построении квазиполиномов с корнями в верхней полуплоскости H^+

Понятие квазиполинома было впервые введено в работах [9-10], а вопрос о нахождении квазиполиномов с корнями в открытой верхней полуплоскости H^+ подробно рассмотрен в монографии Чеботарева – Меймана [11], в частности, в ней найдены необходимые и достаточные условия того, что все корни квазиполиномов

$$\varphi(\omega)=\left(\alpha_r\omega^r+\alpha_{r-1}\omega^{r-1}+\ldots+\alpha_0\right)\cos\omega+\left(\beta_r\omega^r+\beta_{r-1}\omega^{r-1}+\ldots+\beta_0\right)\sin\omega=e^{i\omega}\left[F_0(\omega)+e^{-2i\omega}F_1(\omega)\right] \qquad (4)$$

(r = 1; 2; 3; $F_0(\omega)$, $F_1(\omega)$ – многочлены) расположены в H^+ .

Эти условия имеют вид неравенств, связывающих коэффициенты действительных и мнимых частей комплексных чисел α_k и β_k:

$$\alpha_k=a_k+i\cdot a_k^{'} \quad ; \quad \beta_k=b+i\cdot b_k^{'} \ .$$

С помощью методики Чеботарева – Меймана [11] и теоремы Штурма авторами было ниже доказано, что все корни квазиполинома

$$\varphi_1(\omega)=(a-\alpha i\omega)\cos\omega-(b\omega+\alpha i)\sin\omega+a \ , \qquad (5)$$

где $\alpha=c+id$, a, b, c, d – действительные числа при соотношениях

$$b>a>0, \quad c>0, \quad d>0 \qquad (6)$$

расположены в H^+ .

Постановка Задачи.

Итак, согласно обобщенному методу Штурма, изложенному в [11] составим для функций $V(\omega)=Re\varphi_1(\omega)$ и $V_1(\omega)=Im\varphi_1(\omega)$ последовательность Штурма, описанную в [11, г. 7, §3]. Нетрудно убедиться, что эта последовательность будет содержать три следующих члена:

$$V(\omega)=(b\sin\omega-d\cos\omega)\omega-a\cos\omega-d\sin\omega-a\,;$$
$$V_1(\omega)=-c(\omega\cos\omega+\sin\omega)\,;$$
$$V_2(\omega)=-c^2\cos\omega(1+\cos\omega)(a\cos\omega-b\cos\omega+b). \qquad (7)$$

В [11, г. 7, §4] доказано, что квазиполином $\varphi_1(\omega)$ имеет все корни в H^+, если в интервале $(-2k\pi+\varepsilon;2k\pi+\varepsilon)$, где ε – окрестность ω; функция $V(\omega)$ имеет ровно $4k+1$ вещественных корней первой категории, что равносильно равенству

$$N=N_1-N_2=4k+1=P(-2k\pi+\varepsilon)-P(2k\pi+\varepsilon)-\sum_k l_k\,, \qquad (8)$$

где N – общее число корней функции $V(\omega)$, N_1 и N_2 – число корней первой и, соответственно, второй категории функции $V(\omega)$, $\Delta P=P(-2k\pi+\varepsilon)-P(2k\pi+\varepsilon)$ – число потерь перемен знаков при изменении переменной ω от $\omega=-2k\pi+\varepsilon$ до $\omega=2k\pi+\varepsilon$ в ряду функций

$$V(\omega);\ V_1(\omega);\ V_2(\omega) \qquad (9)$$

$\sum_k l_k$ – сумма потерь перемен знаков последовательности (9), соответствующих вещественным корням функции $V_2(\omega)$.

Докажем справедливость равенства (8) для функции $V(\omega)$ вида (7). Для этого изучим поведение последовательности Штурма (9).

Сначала определим число потерь перемен знаков в ряду (9) на интервале $(-2k\pi+\varepsilon,\ 2k\pi+\varepsilon)$, где ε > 0 очень малое число, а k – целое положительное и настолько большое число, чтобы произведение $k\varepsilon$ тоже оставалось большим числом. Подставляя в функции Штурма $\omega = \pm 2k\pi + \varepsilon$ и отбрасывая бесконечно малые величины высшего порядка, получим:

$$\cos(\pm 2k\pi + \varepsilon) = \cos\varepsilon \approx 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \approx 1\,;\ \sin(\pm 2k\pi + \varepsilon) = \sin\varepsilon \approx \varepsilon$$

и, следовательно, $V(\pm 2k\pi + \varepsilon) \approx \mp 2k\pi d$, $V_1(\pm 2k\pi + \varepsilon) \approx \mp 2k\pi c$, $V_2(\pm 2k\pi + \varepsilon) \approx -2ac^2$,
так что знаки этих величин в силу (6) можно представить в виде таблицы 1:

Табл. 1. Знаки для последовательности Штурма на интервале $(-2k\pi + \varepsilon,\ 2k\pi + \varepsilon)$

	V	V_1	V_2
$-2k\pi + \varepsilon$	+	+	–
$+2k\pi + \varepsilon$	–	–	–

Из таблицы 1 видно, что

$$\sum P = 1, \tag{10}$$

то есть в ряду (9) на интервале $(-2k\pi + \varepsilon,\ 2k\pi + \varepsilon)$ имеет место одна потеря перемены знака; суммирование проводится по итогу таблицы 1.

Определим теперь $\sum_k l_k$. Для этого исследуем поведение последовательности Штурма (9) в окрестности вещественных корней функции $V_2(\omega)$. Нетрудно видеть, что ввиду условия $b > a$ (см. (6)) действительными корнями функции $V_2(\omega)$ будут только корни произведения $\cos\omega(1 + \cos\omega)$, то есть числа вида $\omega = 2k\pi + \sigma\pi/2$ и $\omega = (2k+1)\pi$, где $\sigma = \pm 1$, k – целое число. Положим $\omega = 2k\pi + \sigma\pi/2 \pm \varepsilon$, где ε – весьма малая положительная величина. Тогда, отбрасывая бесконечно малые высшего порядка, получим

$$\cos\left(2k\pi + \frac{\sigma\pi}{2} \pm \varepsilon\right) \approx \mp\varepsilon\sigma\,,\quad \sin\left(2k\pi + \frac{\sigma\pi}{2} \pm \varepsilon\right) \approx \sigma\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right)\;;$$

и, следовательно,

$$V\left(2k\pi + \frac{\sigma\pi}{2} \mp \varepsilon\right) \approx b\sigma\left(2k\pi + \frac{\sigma\pi}{2}\right) - d\sigma - a = \theta\ ,$$

$$V_1\left(2k\pi + \frac{\sigma\pi}{2} \mp \varepsilon\right) \approx -c\sigma\quad ,\qquad V_2\left(2k\pi + \frac{\sigma\pi}{2} \mp \varepsilon\right) \approx \mp bc^2\sigma\varepsilon\ .$$

Вследствие условия (6) знаки этих величин можно представить в виде таблицы 2:

Табл. 2. Знаки для последовательности Штурма в окрестности вещественных корней $\omega = 2k\pi + \sigma\pi/2$ функции $V_2(\omega)$

	$2k\pi + \sigma\pi/2 - \varepsilon$	$2k\pi + \sigma\pi/2 + \varepsilon$
V	sign θ	sign θ
V_1	– sign σ	– sign σ
V_2	– sign σ	sign σ

Так как знаки $V(\omega)$ и $V_1(\omega)$ не меняются в окрестности корня cos z, то знак $V(\omega)$ не окажет влияния на нашу последовательность Штурма и его можно не учитывать. Тогда число перемен знаков в последовательности (9) определяется только знаками $V_1(\omega)$ и $V_2(\omega)$.

Таким образом, из таблицы 2 видим, что в ряду (9) в окрестности корня $\omega = 2k\pi + \sigma\pi/2$ имеет место одно приобретение перемены знака, то есть $\Delta P = P(+2k\pi + \sigma\pi/2 - \varepsilon) - P(+2k\pi + \sigma\pi/2 + \varepsilon) = -1$.

В интервале $(-2k\pi + \varepsilon,\ 2k\pi + \varepsilon)$ содержится всего $4k$ корней cosω, которые дают для суммы, соответствующей корню $2k\pi + \sigma\pi/2$ функции $V_2(\omega)$ значение

$$\sum_k l_k = -4k \ . \tag{11}$$

Осталось определить значения l_k для корней $(2k+1)\pi$ множителя $(1+\cos\omega)$ функции $V_2(\omega)$.

Положим $\omega = (2k+1)\pi \pm \varepsilon$, ε – малое положительное число. Ограничиваясь членами низших порядков малости и учитывая, что

$$\sin\left[(2k+1)\pi \pm \varepsilon\right] \approx \mp\varepsilon \ \text{ и } \ \cos\left[(2k+1)\pi \pm \varepsilon\right] \approx \frac{\varepsilon^2}{2} - 1 \ ,$$

получим

$$V\left[(2k+1)\pi \pm \varepsilon\right] \approx (2k+1)\pi d\,; \quad V_1\left[(2k+1)\pi \pm \varepsilon\right] \approx (2k+1)\pi c\,;$$

$$V_2\left[(2k+1)\pi \pm \varepsilon\right] \approx \frac{(2b-a)\varepsilon^2 c^2}{2} \ .$$

Так как $V\left[(2k+1)\pi \pm \varepsilon\right]$ и $V_1\left[(2k+1)\pi \pm \varepsilon\right]$ меняют знак при перемене знака k, то $V(\omega)$ не влияет на число перемен знаков последовательности (9) и сумма $\sum_k l_k$, соответствующая корню $(2k+1)\pi$ функции $V_2(\omega)$, определяется следующей таблицей 3:

Табл. 3. Знаки для последовательности Штурма в окрестности корней $(2k+1)\pi$ функции $V_2(\omega)$

	$(2k+1)\pi - \varepsilon$	$(2k+1)\pi + \varepsilon$
V_1	sign $(2k+1)\pi$	sign $(2k+1)\pi$
V_2	+	+

Отсюда следует, что ни приобретений, ни потерь перемен знаков в окрестности корня $(2k+1)\pi$ в ряду (9) не произойдет и, следовательно,

$$\sum_k l_k = 0 \ . \tag{12}$$

Из (10) – (12) следует справедливость равенства (8).

Таким образом, доказано, что квазиполином

$$\varphi_1(\omega) = (a - \alpha i\omega)\cos\omega - (b\omega + \alpha i)\sin\omega + a =$$
$$= \frac{e^{i\omega}}{2}\left\{\omega(b-c)i + d\omega + a - c - id + 2ae^{-i\omega} + e^{-2i\omega}\left[\omega(d - ci - bi) + a + c + di\right]\right\}$$

при $b > a > 0$, $c > 0$, $d > 0$ имеет все корни только в верхней открытой полуплоскости.

Заключение

Таким образом, при решении задач экстраполяции и фильтрации L-марковских процессов и некоторых классов видеосигналов проблема построения квазиполиномов с корнями в верхней полуплоскости оказывается крайне актуальной.

Задача о построении квазиполиномов с корнями в верхней полуплоскости H^+ решается в настоящей работе с использованием теоремы Чеботарева - Меймана и теоремы Штурма.

В данной работе получены необходимые и достаточные условия принадлежности к верхней полуплоскости корней квазиполиномов $G(\omega)$, являющихся главной составной частью спектральных плотностей L – марковских процессов и некоторых классов видеосигналов.

Список литературы

1. Kolmogorov A.N. Introductory Real Analysis / A.N. Kolmogorov, S.V.Fomin ; translated by R.A. Silverman. – Prentice Hal, 2009. – 403p.
2. Wiener N. Extrapolation, interpolation and Smoothing of stationary time series. With engineering applications, Cambridge. –New York, 1949.
3. Yaglom A.M. An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions / A.M. Yaglom; Revised English edition translated and edited by Richard A. Silverman. Mineola. – New York, 2004. – 247p.
4. Григорьев С.В. Экстраполяция процессов со спектральной плотностью, знаменателем которой является квазиполином / С.В. Григорьев // Известия вузов. Математика. – 1977. – №6(181). – С. 26-34.
5. Малишич Д. Спектральная характеристика экстраполяции для класса стационарных случайных процессов (сербско- хорв.) /Д. Малишич, Д. Джован// Математический вестник. – 1972, 9, – №2. – С.167 – 172.
6. Фадеева Л.Ю. L – марковские процессы как фрактальные случайные процессы с конечной памятью /Л.Ю. Фадеева, М.В. Хуснутдинов// Международная научная конференция «Нигматуллинские чтения – 2023»: сборник докладов, 9 – 12 октября 2023 г. – Казань: Изд-во АН РТ. –2023. – С. 85-89.
7. Фадеева Л.Ю. Синтезирование стохастической модели прогноза фрактального L-марковского процесса /Л.Ю. Фадеева, М.В. Хуснутдинов// Математические методы в технологиях и технике. – 2024. – № 5. – С. 67-70.
8. Фадеева Л.Ю. Фильтрация L-марковского фрактального процесса с квазирациональным спектром /Л.Ю. Фадеева, М.В. Хуснутдинов// Информационные технологии в электротехнике и электроэнергетике: Материалы XIV Всерос. науч.-техн. конф. Чебоксары: Изд-во Чувашс. ун-та, 2024. – С. 175-176.
9. Гордон А.Н. О делении квазиполиномов /А.Н. Гордон, В. Я. Левин// Функциональный анализ и его приложения. – Т. 5., вып. 1. – 1971. – С. 22-29.

10. Понтрягин Л.С. О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций /Л.С. Понтрягин // Известия АН СССР. Сер. Математика. - Т. 6. – №3. – 1942. – С. 115-134.
11. Чеботарёв Н.Г, Мейман Н.Н. Проблема Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций/ Н.Г. Чеботарёв, Н.Н. Мейман // Труды математического института им. В.А Стеклова, Изд-во АН СССР. – М., Л. – 1949. - Т.26. –331с.

FEATURES OF THE SPECTRAL DENSITY PARAMETERS OF L –MARKOV PROCESSES AND VIDEO SIGNALS

L.Y. Fadeeva, K.D. Zinoviev

Kazan National Research University named after A.N. Tupolev-KAI
10, K. Marx, Kazan, 420111, Russian Federation

Annotation. For the first time, the tasks of extrapolation and filtering of random processes were set in the middle of the 20th century by academician A.N. Kolmogorov. Simultaneously with A.N.Kolmogorov, the American mathematician N. Wiener dealt with this problem, who managed to identify a fairly wide class of processes for which it is possible to obtain explicit extrapolation formulas. These are processes with a rational spectral density. Subsequently, this class was expanded by the followers of A.N.Kolmogorov to the class of quasi-rational spectral densities, the main component of which are quasi-polynomials with roots in the upper half-plane. Therefore, the problem of constructing such quasi-polynomials is extremely relevant. In this paper, based on the Chebotarev method and the generalized Sturm's theorem, necessary and sufficient conditions are obtained for the roots of quasi–polynomials forming the spectral densities of video signals and L-Markov processes to belong to the upper half-plane. This fact plays a very important role in constructing the best linear extrapolators and filtering operators for these processes.

Keywords: video signal, L–Markov process, spectral density, Chebotarev–Meiman method, generalized Sturm's theorem.

Статья отправлена в редакцию 23.12.2024г.