EDN: BPTCRV

МЕТОД РАСЩЕПЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ: ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Р.Р. Нигматуллин

Казанский национальный исследовательский технический университет имени
А.Н. Туполева-КАИ
Российская Федерация, 420111, г. Казань, ул. К. Маркса, 10

В этой краткой заметке найдено *общее* решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, полученного методом расщепления.

Автор этой заметки, узнав из Интернета о грандиозном достижении математика И.Д. Ремизова (https://www.hse.ru/news/science/1122687898.html) [1], решил предложить свой альтернативный (и весьма простой по сравнению с [1]) подход, который также имеет право на существование. Суть этого подхода восходит к работам профессора Ю.И. Бабенко [2], который расщепил одномерное уравнение диффузии и нашел его новые аналитические решения для нелинейных случаев.

Пусть дано линейное ДУ второго порядка, которое мы запишем в стандартном виде

$$\begin{gathered} y''+p(x)y'+q(x)y=0, \\ (D^2+pD+q)y(x)=0,\ D=d/dx. \end{gathered} \tag{1}$$

В дальнейшем, чтобы не загромождать промежуточные выкладки, мы опустим временно зависимость от управляющей переменной x и восстановим эту зависимость в окончательных выражениях. Вторая строка в выражении (1) эквивалентная запись, но более предпочтительна в наших расчетах, приведенных ниже. Следуя логике "расщепления" Бабенко Ю.И. [2] допустим, что уравнение (1) можно записать в виде

$$\begin{gathered} (D-\lambda_1)\cdot(D-\lambda_2)y \equiv \left(D^2+pD+q\right)y=0, \\ (D-\lambda_2)\cdot(D-\lambda_1)y \equiv \left(D^2+pD+q\right)y=0. \end{gathered} \tag{2}$$

В выражении (2) мы предполагаем симметрию относительно перестановки функций $\lambda_1(x)\leftrightarrow\lambda_2(x)$. Раскрывая множители слева в (2) и учитывая симметрию этих функций относительно их перестановок друг с другом, получим

$$-\frac{1}{2}\left(\lambda_1+\lambda_2\right)Dy-\frac{1}{2}D\left[\left(\lambda_1+\lambda_2\right)\cdot y\right]+\lambda_1\lambda_2 y=\left(pD+q\right)y=0. \tag{3}$$

Раскрывая скобки слева и приравнивая их к соответствующим выражениям справа, получим систему дифференциальных уравнений первого порядка для отыскания неизвестных функций $\lambda_{1,2}(x)$.

$$
\begin{aligned}
&-\left(\lambda_1+\lambda_2\right)=p, \\
&-\frac{1}{2} D\left(\lambda_1+\lambda_2\right)+\lambda_1 \lambda_2=q.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Из этой системы получим систему уравнений для функций $\lambda_{1,2}(x)$.

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1+\lambda_2=-p, \\
&\lambda_1 \lambda_2=q-\frac{1}{2} D p.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Решая эту систему уравнений, получим искомое решение для неизвестных функций $\lambda_{1,2}(x)$.

$$
\lambda_{1,2}(x)=-\frac{p(x)}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2(x)}{4}+\frac{1}{2} D[p(x)]-q(x)}. \tag{6}
$$

Используя это решение, получим две эквивалентные системы для отыскания неизвестной функции $y(x)$

$$
D y=\lambda_{1,2}(x) y. \tag{7}
$$

Разрешая эти два простейших уравнения относительно $y(x)$, получаем (в силу линейности исходного ДУ) искомую комбинацию

$$
y(x)=C_1 \exp \left[\int_{x_0}^x \lambda_1(x) d x\right]+C_2 \exp \left[\int_{x_0}^x \lambda_2(x) d x\right]. \tag{8}
$$

Последние три формулы решают задачу о нахождении общего решения уравнения вида (1), полученного методом расщепления. Автор в этой краткой заметке не претендует на то, что это решение (8) *единственное*. Задача математиков – обосновать это решение и найти границы его применимости. Думаю, что в силу его простоты, оно также найдет свое применение в широком классе задач, наряду с методом, предложенным И. Ремизовым. Хочу особо подчеркнуть, что автор этой заметки *не* разбирался в деталях решения [1]. Автор считает, что найдутся математики, которым будет интересно сравнить решение, полученное в статье [1] с решением (8), полученное методом расщепления.

Литература

1. Remizov I.D. Chernoff Approximations of the Solution of Linear ode with variable coefficients / I.D. Remizov// Vladikavkaz Mathematical Journal. – 2025. – Volume. - 27. - Issue 4. - P. 124–135.

2. Бабенко Ю.И. Тепломассообмен: метод. расчета тепловых и диффузионных потоков /Ю. И. Бабенко. - Ленинград: Химия, Ленинградское отделение, 1986. - 143 с.